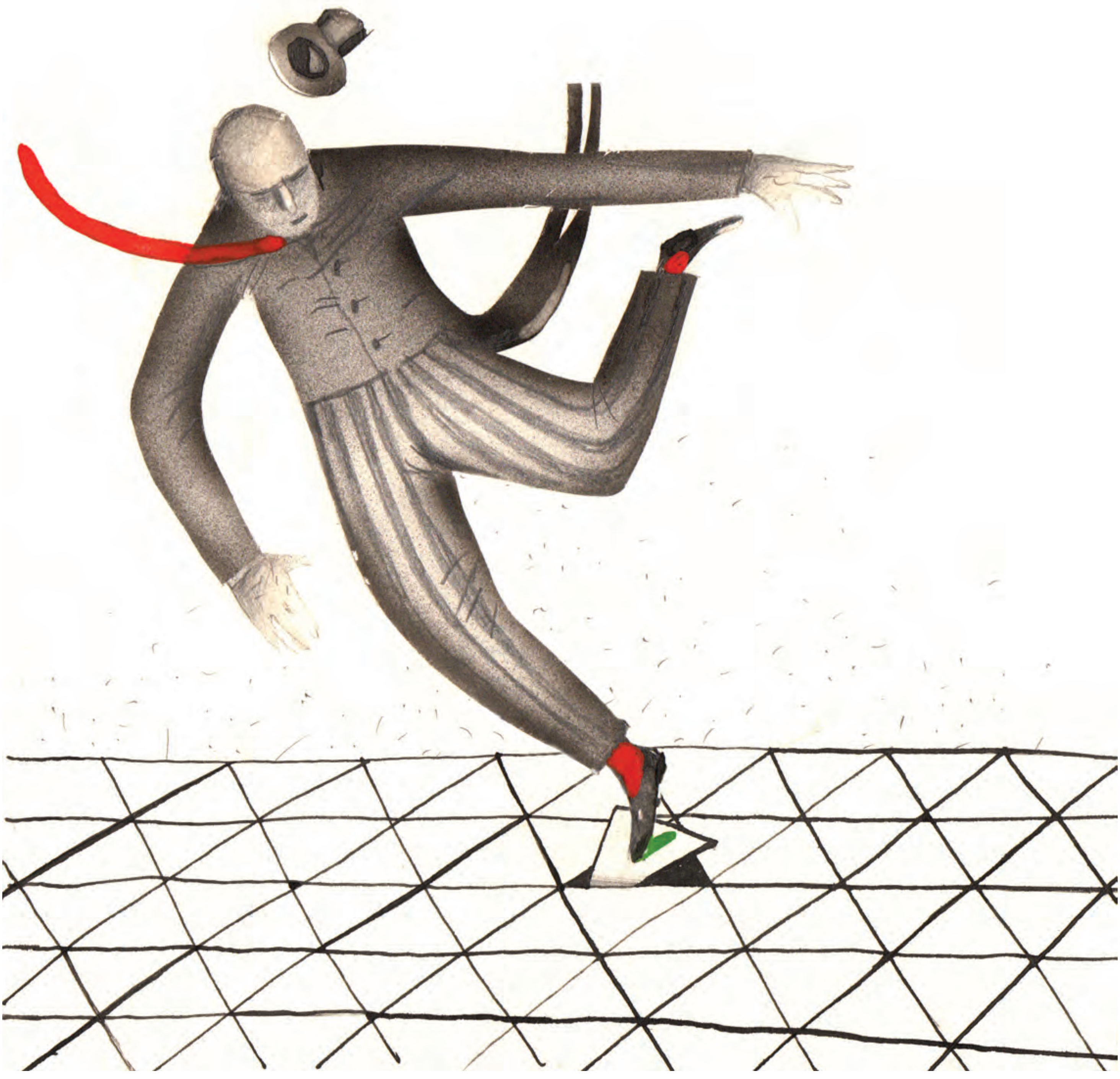
ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ
2014 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ПЯТЬ ЗАЦЕПЛЕННЫХ ТЕТРАЭДРОВ

Вы, наверное, слышали об оригами – древнем искусстве складывания фигурок из бумаги без использования клея. Оно было широко распространено на Востоке, в Китае и особенно в Японии, и считалось аристократическим занятием. Это неудивительно, ведь хорошая бумага в то время была роскошью. В Европу оригами стало проникать через арабские страны в средние века. Но сейчас бумага доступна, и оригами увлекаются по всему миру. Более того, оно стало предметом и научного изучения: например, солнечные батареи космических аппаратов складываются и раскладываются по схемам оригами. Некоторые классические задачи на построение, которые не поддаются циркулю и линейке, можно решить с помощью оригами. Читайте об этом статью А. Петрунина «Оригами и построения» в «Кванте» №1 за 2008 год.

Предлагаем вам собрать непростую, но очень красивую конструкцию – пять зацепленных друг за друга тетраэдров, ее фотографию вы видите выше. Инструкция сборки приведена внутри журнала на странице 37. Фото и алгоритм складывания взяты с замечательного сайта mathigon.org, который интересно и красочно рассказывает не только об оригами, но и о других разделах математики.

Е. Епифанов

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2014 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В этом году исполнилось бы 80 лет Юрию Владимировичу Гапонову (1934–2009).

Ю.В.Гапонов был исключительно ярким и многосторонним человеком. Он стоял у истоков Большого физического искусства (в частности, известной оперы «Архимед»), первых в нашей стране студенческих строительных отрядов, традиции физических праздников – «Дней Архимеда» и позже «Дней физика» – на физическом факультете МГУ и в Курчатовском институте, которые затем «разошлись» по всей стране. В 1990-х годах Юрий Владимирович задумал и осуществил небывалое дело: по выражению американского историка науки Дэвида Холлоуэя, он впервые «собрал вместе воинов холодной войны». Две организованные им международные конференции, посвященные истории атомных проектов Советского союза и других стран, собрали сотни легендарных и малоизвестных участников атомных проектов, позволили опубликовать множество совершенно неизвестных до тех пор материалов.

Научные интересы Ю.В. Гапонова были связаны с ядерной и нейтринной физикой. В последние годы он нашел новый неожиданный подход в теории нейтрино, который позволил ему вплотную подойти к решению проблемы нейтринных масс и, в конечном итоге, предсказать их абсолютные значения. Оге Бор, с которым ему много приходилось общаться в том числе и по поводу своих работ по теории нейтрино и который очень ценил эти работы, однажды произнес фразу, чрезвычайно дорогую и, по-видимому, во многом символичную для Юрия Владимировича: «Вот кто Вас полностью мог бы понять – это Нильс Бор».

В октябре 2009 году мы договорились с Юрием Владимировичем заняться в ближайшие месяцы подготовкой научно-популярной статьи для «Кванта», в которой была бы изложена не только история исследований нейтрино, но и тот новый взгляд на физику нейтрино, который возникал из его собственных работ последних лет. К сожалению, этим планам не было суждено сбыться.

Публикуемый здесь очерк истории нейтринной физики представляет собой расшифровку аудиозаписи лекции Юрия Владимировича Гапонова по истории исследований нейтрино, прочитанной на физическом факультете МГУ 13 декабря 2005 года на семинаре «Физика нейтрино и взаимодействие частиц во внешних полях».

В. Птушенко

Очерк истории исследований нейтрино

Ю.ГАПОНОВ

Я ХОТЕЛ БЫ СКАЗАТЬ СПАСИБО ЗА ТО, ЧТО МЕНЯ пригласили на физфак МГУ. Я кончал физфак очень давно, в 1958 году, потом была аспирантура на физфаке, и мне очень приятно снова быть в Альма-матер и рассказывать те вещи, которые, с моей точки зрения, находятся на самом передовом рубеже современной науки.

Я начну с такого утверждения: с моей точки зрения, в физике назрела революция – в физике элементарных частиц. Эта революция произойдет, по-видимому, в ближайшие несколько лет, и связана она с физикой нейтрино. Это мое убеждение, и это подтверждает развитие событий, о котором я вам буду сегодня рассказывать. В последние несколько лет в этой области начинают возникать совершенно новые, необычные представления.

В первой части моей лекции я расскажу про историю физики нейтрино. В течение ста лет идет развитие истории, причем идет медленно, поскольку физика нейтрино оказалась очень сложной, и происходит последовательное чередование: эксперимент, теория, эксперимент, теория. Каждый период длится приблизительно 20–30 лет. Ну, теоретический период развития занимает обычно время порядка 10 лет. И каждый раз оказывается, что наши представления, которые были сформулированы ранее, надо кардинальным образом менять.

Например, началось все с открытия бета-лучей. В течение 30 лет физики исследовали это явление, не зная, что есть нейтрино. Это был первый период. Второй период – когда родилась концепция нейтрино. Возникла парадоксальная ситуация: нейтрино (которое, кстати, было придумано Паули[1] , а Бор был против этого в течение 8 лет) оказалось частицей, которую невозможно зарегистрировать. Очень смешная ситуация. В фи-

[1] См. Именной комментарий в конце статьи (расположение – по мере упоминания в тексте статьи).

Юрий Владимирович Гапонов

зике – впервые. После этого был опять большой экспериментальный период, в конце которого было зарегистрировано нейтрино. И снова возникла парадоксальная ситуация: в 1956 году, в тот же год, когда экспериментально было зарегистрировано нейтрино, выясняется, что у него совершенно необычные свойства: то, что мы называем нарушением четности [2] (временнóй четности). Иными словами, нейтрино в зеркале на себя не похоже, и когда вы обращаете время – нейтринные процессы тоже идут по-другому.

Дальше. Формулируется то, что сегодня существует и живет в физике элементарных частиц: так называемая Стандартная модель. И, казалось бы, 20 лет идет только утверждение этой модели, никаких противоречий нет, пока в начале 1990-х годов не появляются факты (в физике нейтрино), которые никак не укладываются в Стандартную модель. И сегодня, последние 2–4 года, мы вообще занимаемся только тем, что открываем явления, которые никуда не укладываются. И теории еще нет, есть только эксперимент, и еще не ясно, куда он будет развиваться дальше. Вот сегодняшняя ситуация. Об этом я вам сейчас буду рассказывать.

Давайте сначала вспомним, что было 100 лет назад. Сто лет назад Беккерелем была открыта радиоактивность. Вскоре обнаружилось, что в магнитном поле эти лучи (которые тогда считали просто жесткими рентгеновскими лучами) расщепляются и распадаются на три разные составляющие: одна – положительного заряда (альфа-частицы), вторая – отрицательного заряда (бета-частицы) и третья – нейтральная (гамма-лучи). Итак, было открыто, что бета-лучи (а это и есть начало бета-спектров, нейтринной физики) обладают зарядом. Вслед за этим было выяснено, что это быстрые электроны. А раз вы имеете быстрые электроны и магнитное поле, вы можете построить бета-спектрометр. Бета-спектрометры были построены достаточно быстро, в них сначала использовались фотопластинки, потом счетчики Гейгера. Приблизительно с 1910 по 1914 год было показано, что спектр бета-лучей очень своеобразный – это есть некий непрерывный спектр, на котором торчат пики. Причем эти пики были размыты, и считалось, что это просто экспериментальная аппаратура плохая, а то что мы называем непрерывным спектром, возможно, тоже есть артефакт, связанный с недостатками нашей аппаратуры.

И вот в это же время впервые формулируется модель атома. Как известно, сначала эксперимент Резерфорда, а потом теория Бора дали нам первую модель атома, согласно которой атом состоит из точечного ядра и очень большого облака электронов (размеры ядра порядка 10^{-14} м, размеры электронного облака – 10^{-10} м, т.е. на 4 порядка больше). Возник вопрос: откуда берутся бета-электроны? Изнутри или снаружи? Это что – те электроны, которые выбиты из атомной оболочки, или они вышли из ядра? Первый, кто произнес слово «ядро», был Нильс Бор, который сказал: бета-лучи испускаются из ядра.

Как исследовать спектры бета-распадов? Резерфорд предложил поразительно интересную идею: давайте развернем ситуацию и гамма-лучами, которые присутствуют в радиоактивном излучении, будем снова облучать это же ядро. Тогда если гамма-лучи падают на ядро, то они могут выбить внешние электроны, и можно измерить энергию гамма-лучей по энергии этих электронов (поскольку в это время не было способов измерения гамма-лучей). Когда эта идея была воплощена в эксперименте, то оказалось, что пики, которые наблюдались в бета-спектрах – они сейчас называются конверсионными линиями, – позволяют померить энергию электронов. И выяснилось, что энергия электронов (точнее, разность их энергий) довольно жестко связана с энергиями атомных спектров. Таким образом, на самом деле электроны, которые наблюдаются в спектре, вот эти пики, связаны с внешними электронами, а не с внутренними. Но каким образом они возникают? Появилась такая модель: гамма-лучи испускаются ядрами, эти гамма-лучи поглощаются электронами, которые выбивают внешние электроны, электроны оболочки. Так возникают электроны, соответствующие линиям, которые в атомной физике известны как K, L, M-линии. Но тогда ядро не является простым: оно тоже сложное, а не точка, как было у Резерфорда; на самом деле это сложное образование. Вот отсюда появляется представление о том, что ядерная физика – вещь гораздо более сложная и что у ядер есть возбужденные состояния. Однако вопрос о том, откуда берутся элек-

[2] Четность – свойство физической величины сохранять свой знак (или изменять на противоположный) при некоторых преобразованиях, т.е. характеристика симметрии системы уравнений, описывающих какие-либо физические законы, по отношению к этим преобразованиям. Так, пространственная четность P характеризует симметрию системы уравнений относительно знаков координат всех частиц, временнáя четность T – относительно направления течения времени, зарядовая четность C – относительно замены всех частиц на античастицы.

троны, остается. И возникла модель (это 1923–25 годы; эту модель особенно сильно развивал Резерфорд), согласно которой ядро состояло из протонов и электронов. Электроны, которые рождаются при бета-распаде, время от времени вылетают наружу, а протоны остаются. Заряд ядра – это есть разность зарядов протонов и электронов. Например, ядро $^6_3\mathrm{Li}$ состоит из шести протонов и трех электронов. Эта модель существовала достаточно долго, до конца 1930-х годов, и возникали разные интересные вопросы. Например: если ядро испускает бета-лучи и гамма-кванты, то что раньше вылетает – бета-частица или гамма-частица? С современной точки зрения (мы теперь знаем ответ на этот вопрос), если ядро нестабильно, то сначала оно испускает бета-лучи, потом переходит в основное состояние (или в более низкое возбужденное) и испускает гамма-кванты. Как видите, идет развитие ядерной физики – и все это через бета-лучи.

Наконец, встал такой вопрос: ну хорошо, пики мы объясняем тем, что происходит выбивание электронов в оболочке; а есть ли такие бета-спектры, в которых нет конверсионных линий? Да, есть. Это спектр так называемого радия-Е. Он был известен. В нем нет конверсионных линий. Спрашивается, а как же тогда? Откуда берутся электроны? Вылетают из ядра? Но тогда они что, не квантованы? (К этому времени уже было ясно, что все в мире должно быть квантовано.) Значит, получается, что они непрерывные (в том смысле, что их энергия принимает любые значения). Как это объяснить? В этой области работали две интересные группы.

Одна группа – это группа Резерфорда, к которой потом, где-то в конце 1910-х–начале 1920-х годов, присоединился Эллис. Эллис очень забавно попал в физику. Чедвик, который делал эксперименты по бета-спектру и который открыл непрерывную часть этого спектра, в 1914 году попал в Германии в плен. Он был интернирован, и во время плена, чтобы провести как-то время, он читал лекции. Среди военнопленных, которые вместе с ним сидели, были молодые ребята, в частности был Эллис, который очень заинтересовался этой тематикой и после войны стал одним из ведущих физиков у Резерфорда. Так вот, эта группа не создавала никаких моделей, у них была идея: просто давайте исследовать, а дальше – что получится, то получится.

Вторая, немецкая группа состояла тоже из молодых в то время физиков, во главе которых были Лиза Мейтнер и Отто Ган – их знают сейчас как открывателей деления ядра в 1939 году и в честь них названы два новых элемента: хассий и мейтнерий.[3] У них была идея, что электрон, когда он вылетает из ядра и летит сквозь электронную оболочку, где-то там теряет энергию, рассеивается на этих электронах, и поэтому получается не дискретный спектр, а непрерывный. Это была идея объяснения. Но как объяснить, что электрон пролетает сквозь практически пустое облако и так сильно рассеивается? Вот это была проблема.

Итак, к концу 1920-х годов стало ясно, что есть одна загадка – непрерывный спектр бета-лучей. Почему он непрерывный, как это объяснить? И тогда был сделан совершенно поразительный эксперимент, очень интересный, который заставил физиков серьезно задуматься. Этот эксперимент был такой: давайте померяем полную энергию всех электронов, которые вылетают. Для этого поместим наш бета-источник в термостат, и всю энергию, которая есть там, померяем. Померили. И выяснилось, что энергия бета-лучей составляет приблизительно половину средней энергии, которая выделяется в данном ядре (к этому времени была открыта верхняя граница бета-спектров, поэтому можно было сказать: верхняя граница такая-то, а вот половина этой границы). Как это объяснить? Здесь впервые физики подошли к загадке, которая решалась таким простым, но совершенно необычным способом: пришлось ввести новую частицу.

Здесь я кончаю рассказ про первую стадию, экспериментальную стадию. Давайте посмотрим, что было дальше.

К концу 1920-х годов мы приходим вот в какой ситуации. С одной стороны, уже родилась квантовая механика, известно уравнение Шредингера. Это уравнение позволяет описать атом, т.е. электрон, скачущий по своим орбитам вокруг ядра. Но никто не знает, годится ли квантовая механика для того, чтобы исследовать ядро, или нет. Кроме того, есть уравнение Дирака (это релятивистское обобщение уравнения Шредингера). Оно имеет нетривиальное свойство: у него есть два решения, одно решение с положительной энергией, другое решение – с отрицательной. Уже тогда была высказана идея, что, может быть, есть две частицы, но в эксперименте ничего не было обнаружено, был только электрон.

И еще одна проблема, которая была связана с бета-спектрами: как описать само ядро? Здесь возникают две гипотезы. Одна гипотеза – это гипотеза Нильса Бора. Бор говорил очень мудрые на самом деле слова, как мы сейчас понимаем; но, может быть, немножко по-другому они должны быть восприняты. Он говорит: хорошо, атомную физику мы знаем, вот она объясняется с помощью квантовой физики и так далее. А вот что в ядре? Может быть, там все законы нарушаются? И он говорит: я думаю, что, может быть, там нарушается закон сохранения энергии. В этом он был не прав. Но в чем-то, оказывается, он был прав – я об этом дальше скажу. А Паули предложил совершенно новую идею: до сих пор в физике были только заряженные частицы, а почему не может быть нейтральных частиц? Паули высказал эту идею приблизительно в 1929–30 годы в письмах, причем Бор настолько категорически заявил, что не хочет даже об этом слышать, что

[3] Это открытие чаще упоминается в литературе как открытие Гана и Штрассмана – авторов статьи 1939 года о расщеплении ядра урана, а не как результат 30-летнего сотрудничества Гана и Мейтнер. После вынужденного отъезда Лизы Мейтнер из Германии в 1938 году совместные публикации их работ были невозможны по политическим соображениям.

Для элемента 108 после синтеза в 1984 году было предложено имя оттоганий, в 1994 году – ганий, а в 1997 году утвердилось название хассий – в честь немецкой земли Гессен (лат. Hassia), в которой был синтезирован этот элемент.

Паули с Бором потом не переписывался. Паули писал письма Гейзенбергу, а Гейзенберг, как лучший ученик Нильса Бора, с ним разговаривал. Получал ответ Бора – писал снова Паули. Вот так эта полемика между ними шла, до 1936 года Бор не признавал идею о нейтральных частицах.

На самом деле, все оказалось не так просто. Дело в том, что то что предложил Паули, на самом деле это совсем не нейтрино. Паули предложил нейтрон. Он предположил, что в ядре есть нейтрон, который выскакивает в момент бета-распада. Но когда нейтрон был открыт, оказалось, что он тяжелый, а отнюдь не такой легкий. И поэтому, в развитие этой идеи, было сказано дальше следующее: ну хорошо, существует легонький нейтрончик – нейтрино (это Ферми так его назвал), как маленький нейтрон. И вот именно он является той самой нейтральной частицей в бета-распаде. Иными словами, на самом деле была открыта не одна, а две частицы: нейтрон (который, кстати, Резерфорд предполагал в свое время, еще в 1920-х годах, как связанное состояние протона и электрона) и нейтрино.

И еще один поворот должен был произойти, прежде чем физики начали выстраивать новую картину. Этот поворот – открытие нейтрона и позитрона в 1932 году. Совершенно потрясающий год в физике, который перевернул физику (физику ядра и физику частиц). В этот год было открыто две вещи: нейтрон (экспериментально было показано его существование) и позитрон. Кстати, позитрон наблюдал, как известно, Скобельцын в России, но он не знал, в какую сторону должен в данном магните лететь этот позитрон. Считалось, что у него другое направление поворота в магнитном поле просто потому, что он идет не сверху, из космических лучей, а из-под земли.[4]

Итак, был, открыт нейтрон. Что это означает? Я вам приводил пример ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, который с точки зрения предыдущей модели – протон-электронной – состоял из шести протонов и трех электронов. А с точки зрения нейтрона? Если есть нейтрон, то в ядре три протона, три нейтрона, и всего частиц – шесть! Это уже разная статистика[5]: в первом случае ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ имеет спин полуцелый, а во втором – целый. А это можно проверить в эксперименте. И вот когда это было проверено, стало ясно, что нейтронная гипотеза более вероятна, чем электрон-протонная. Итак, в 1932 году рождается нейтрон-протонная модель. Кстати, в ее рождении участвовали три человека: Гейзенберг, который постоянно переписывался с Паули на эту тему, Иваненко в России, совершенно независимо, и, наконец, Майорана. Обычно про Майорана никто не знает, а он был учеником Гейзенберга и выдвинул эту идею независимо.

После того как был открыт позитрон, начала укладываться в цельную схему идея, связанная с уравнением Дирака, т.е. начала подтверждается квантовая электродинамика. Квантовая электродинамика (и с современной точки зрения, и с точки зрения, которая была сформирована в 1930 году) говорит следующее: когда два электрона рассеиваются друг на друге, между ними проскакивает гамма-квант – виртуально, как мы говорим. Или, иными словами: возникает электромагнитное поле между этими электронами. (Есть, конечно, и другой процесс, когда этот гамма-квант падает, скажем, на атом и может родить электрон-позитронную пару.) Что существенно для этой теории: в ней есть некая константа взаимодействия. Это постоянная слабого взаимодействия[6] $e^2/(\hbar c)$, равная $1/137$, знаменитая константа, которая до сих пор правит квантовой электродинамикой и, по-видимому, имеет даже большее значение, но пока мы еще плохо понимаем, где она еще может быть применена. Во всяком случае, квантовая электродинамика полностью объясняется с помощью этой константы. Это – некая фундаментальная константа мира. И тогда в параллель этой идее Ферми предположил похожую – просто аналогичную – модель для бета-распада. Согласно этой модели, бета-взаимодействие, по Ферми, выглядит так. Летит нейтрон, потом он превращается в протон (это есть некое взаимодействие, которое можно описать чисто феноменологически, некой константой) и вылетают электрон и нейтрино:

$$ {}^{1}_{0}n \to {}^{1}_{1}p + e^{-} + \tilde{\nu}_e \, . $$

Я написал здесь антинейтрино, но это уже сегодняшний день. А в принципе – здесь нейтрино. И константа, которая описывает этот процесс, очень похожа на константу из квантовой электродинамики. Но из-за того что не известно, что здесь находится, она нормирована на массу электрона в квадрате, это 10^{-10}. Смотрите, какая маленькая константа: там $1/137$, а здесь 10^{-10}. Что это означает? Это означает, что сечение взаимодействия – совершенно фантастически маленькая величина. Ну, что такое сечение, вспомним. Возьмем пятак и бросим на него поток частиц. Как часто этот поток частиц будет взаимодействовать с этим пятаком? Все будет зависеть от того, какова площадь этого пятака в проекции на поперечное сечение потока (это и называется словом «сечение»), от величины потока и времени, в течение которого вы наблюдаете. Площадь пятака – аналог сечению взаимодействия, которое используется в физике.

[4] Действительно, Скобельцын первый наблюдал позитрон, но он думал, что это электрон из земли, так как увидел, что наблюдаемая частица летит от магнита в противоположную сторону, чем летел бы электрон. А с позитроном все в порядке – у него заряд другого знака.

[5] Поведение систем частиц, обладающих целым или полуцелым спином, существенно различается. Так, известный принцип запрета Паули относится только к частицам с полуцелым спином. В квантовой статистической физике частицы, имеющие целый спин (так называемые бозоны), описываются статистикой Бозе–Эйнштейна, а имеющие полуцелый спин (фермионы) – статистикой Ферми–Дирака.

[6] Постоянная тонкой структуры, или постоянная Зоммерфельда. Выражение через фундаментальные константы приведено в системе единиц СГСЭ, используемой в квантовой электродинамике. Численное значение не зависит от выбора системы единиц.

Оказалось, что если смотреть процессы взаимодействия вещества с нейтрино, то сечение находится на уровне $10^{-43}-10^{-46}$ см^2. В то время как сечение ядерных реакций это $10^{-24}-10^{-28}$ см^2. Ну, легко понять эти оценки. Если размер ядра 10^{-12} см, то квадрат размера этого ядра – 10^{-24} см^2. Вот нормальное ядерное сечение. А 10^{-28} см^2 – это очень маленькая величина. Теперь давайте представим себе, что такое 10^{-42} см^2. Это значит, что размер области, где идет взаимодействие нейтрино с другими частицами, которые осуществляют слабое взаимодействие, примерно 10^{-21} см. Сегодня мы его немного по-другому оцениваем, как $10^{-17}-10^{-18}$ см, но все равно получаются очень маленькие сечения – вы должны попасть вашим потоком в монетку размером порядка 10^{-20} см. Ясно, что даже по сравнению с ядерными сечениями это невероятная задача. И вот это была следующая проблема, которую нужно было решать. Но раз так, то вы никогда не сможете зарегистрировать нейтрино. Имея такие маленькие сечения, нейтрино спокойно проходит сквозь земной шар. Один раз взаимодействуя за все время движения через весь земной шар. Один раз! Как вы будете это регистрировать? Вот проблема, с которой столкнулись физики.

Чтобы кончить с этим периодом, я покажу основных участников – теоретиков, которые в этот период работали.

Дирак в 1928 году пишет свое уравнение (релятивистское волновое уравнение электрона). Кстати, у уравнения Дирака есть один интересный предельный случай: давайте в уравнении Дирака положим массу равной нулю. В результате редукции получается уравнение Вейля. Так вот, самая фантастическая, самая загадочная и странная вещь была в том, что уравнение Дирака, когда вы обращаете массу в ноль, может привести к нарушению Р-четности. Вот этот случай, уравнение Вейля (т.е. уравнение движения для безмассовой частицы со спином $1/2$, частный случай уравнения Дирака), считался нефизическим. К нему вернулись только через 20–25 лет. Получается, что сразу можно было открыть необычные свойства нейтрино, пожалуйста – Вейль написал это уравнение. Но они были такие необычные, что никто в это не поверил. Скажу больше, был эксперимент в 1929 году, который на самом деле повторил – ну, не повторил, а предшествовал экспериментам 1956–57 годов, где измерялась поляризация электронов (т.е. взаимная ориентация спина и импульса частиц), вылетающих при бета-распаде. Там нашли, что они поляризованы, но в это никто не мог поверить. Эксперимент отставили в сторону и сказали: этого не может быть. И все. Вот такая интересная штука.

Дальше – противоречия в протон-электронных моделях ядра, о которых я вам сказал. На них впервые обратил внимание Крониг. Гипотеза о нарушении сохранения энергии была предложена Бором в 1929 году, а гипотеза Паули о нейтроне – в 1930 году. Нейтрон и позитрон были открыты Чедвиком и Андерсоном в 1932 году, а протон-нейтронная модель в этом же году была построена теми тремя людьми, о которых я говорил. Была попытка построить теорию бета-распада с нарушением закона сохранения энергии, была опубликована такая работа. И Бор на нее ссылался! Но – до 1936 года, и она оказалась неправильной.

Нейтринная гипотеза Паули – это уже 1933 год. Как видите, сначала нейтрон, а потом нейтрино. Значит, теория Ферми тогда же была построена. Оценка сечения взаимодействия нейтрино, о которой я вам говорил и которая показала, что нейтрино не регистрируется, была проведена Бете и Пайерлсом в 1934 году.

Еще хочу вам сказать о двойном бета-распаде (т.е. таком распаде ядра, который сопровождается увеличением заряда ядра на две единицы и излучением двух электронов). Двойной бета-распад был впервые предложен Гёпперт-Майер в 1935 году. И только сегодня мы начинаем им заниматься экспериментально. Нужно было 70 лет ждать, чтобы начать им заниматься.

И самое интересное, то что мы сегодня только начинаем изучать – это гипотеза Майорана. Дело в том, что нейтрино как дираковская частица (т.е. то, что было придумано Ферми по аналогии с уравнением Дирака) имело нормальные свойства: было нейтрино, было и антинейтрино – точно так же, как существуют электрон и позитрон, есть нейтрино и антинейтрино. Однако кто вам сказал, что это единственная возможность? И вот Майорана в 1937 году, буквально за несколько месяцев до своей смерти, публикует работу, в которой предлагает следующее: он берет уравнение Дирака, делает некие математические преобразования и показывает, что в нем есть решения, в которых нейтрино может быть тождественно антинейтрино. Тогда нет никакого электронного заряда, точнее – это ноль. И такое нейтрино может существовать. Вот эта эстафета была подхвачена Понтекорво. Понтекорово был тем человеком, который слушал Майорана в 1937 году. Кстати, до сих пор судьба Майорана неизвестна; по-видимому, он покончил жизнь самоубийством, буквально через несколько месяцев после того, как написал эту статью.

Вот такая загадка осталась нам с 1937 года. Надо сказать, что ее просто игнорировали в то время. Мало того что нейтрино нельзя зарегистрировать, так к тому же еще у него какие-то совсем ненормальные свойства.

Итак, с 1932–33 годов начинается совершенно новый период – экспериментальный период изучения бета-распада. До этого времени ядерной физики еще не существовало, и все, что изучали физики, это были радиоактивные ядра, которые давали электроны – т.е. происходили бета-минус распады (с нашей сегодняшней точки зрения). А с 1932 года, после того как был открыт нейтрон, начинается бурное развитие ядерной физики, открывается много разных ядер, можно нейтрон загонять в ядра и смотреть, что будет. Если вы альфа-частицу загоните внутрь ядра с помощью циклотрона, то можно находить и положительные ядра, с избытком протонов, и наблюдать бета-плюс распады.

Таким образом, возникают интересные варианты нейтринных процессов. Во-первых, бета-минус распад (который изучался до этого):

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{N} \to {}_{Z+1}^{\;\;A}\mathrm{N} + e^{-} + \tilde{\nu}\,. $$

Во-вторых – бета-плюс распад, где рождаются позитроны:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{N} \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{N} + e^{+} + \nu\,. $$

Но возможен еще интересный процесс K-захвата – захвата электронов ядром, с тем чтобы появилось нейтрино:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{N} + e^{-} \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{N} + \nu\,. $$

Наконец, двойной бета-распад, о котором, я вам сказал, впервые начали думать в то время:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{N} \to {}_{Z+2}^{\;\;A}\mathrm{N} + 2e^{-} + 2\tilde{\nu}\,. $$

Оказалось, что все эти процессы очень существенны для астрофизики: для горения Солнца, эволюции звезд и даже для коллапса сверхновых – это когда у вас очень тяжелое ядро, состоящее из железа, вдруг мгновенно превращается в нейтронную звезду, коллапсирует. Эта идея, кстати, принадлежит Ландау (работа 1937 года). И еще одну интересную вещь могу вам сказать. Когда Ландау посадили в тюрьму, Бор написал письмо Сталину, и в этом письме он говорил о Ландау как о крупнейшем ученом и приводил в пример, как потрясающую работу, именно коллапс звезд. Это был аргумент Сталину для того, чтобы Ландау выпустили из тюрьмы.

А дальше начинается много открытий в космических лучах. Начали подозревать, что это некие частицы, достаточно тяжелые. Сначала думали, что это пи-мезоны; оказалось, что это мю-мезоны (по нынешним представлениям) и что эти мю-мезоны тоже радиоактивны, как тогда говорили. И эта радиоактивность мезонов совершенно необычна. Оказалось, что мезон распадается на электрон и два (!) нейтрино. Впервые был обнаружен процесс, в котором не одно нейтрино, как в бета-процессе, а два нейтрино. При этом нет такого процесса, когда бы мезон распадался на электрон и гамма-квант. Затем был открыт пи-мезон, как предшественник мю-мезона. И он был открыт (не хочу сейчас залезать в детали) при исследованиях, которые были связаны с поисками причин ядерных сил. Эти пи-мезоны были обнаружены в космических лучах. Оказалось, что они распадаются на мю-мезоны; еще есть превращение в электрон и нейтрино.

Наконец, одним из самых интересных открытий того времени, по-видимому, было открытие бета-распада нейтрона. Бета-распад нейтрона был открыт в 1948 году Робсоном в Америке и Спиваком в России. Надо вам сказать, что, конечно, это открытие – Нобелевская премия, но Спивак в 1948 году работал в Курчатовском институте, в команде Игоря Васильевича Курчатова, и, конечно, эти работы не публиковались. Таким образом, мы прозевали очередную Нобелевскую премию.

И вот, в это же время, наконец, на стыке ядерной физики и техники рождается атомный реактор – ну, мы знаем, работы с 1941–43 годов начинаются в разных странах. И становится ясно, что все-таки природа нам дает возможность попробовать найти реально и зарегистрировать нейтрино, поскольку реактор есть мощный источник нейтрино. Ну, действительно, в реакторе происходит деление ядер, возникают ядра, очень сильно избыточные по нейтронам. Они, естественно, распадаются с помощью цепочек по бета-распадам достаточно быстро. Избыточные нейтроны у вас есть, поэтому это – бета-минус распады. И количество этих распадов – фантастически большое: поток нейтрино от реактора на расстоянии около 10 метров (от самого реактора) составляет 10^{13} нейтрино в секунду через квадратный сантиметр. Это фантастические потоки! Вот те самые 20 порядков, которые нужно было скомпенсировать, чтобы уйти от сечений 10^{-43} см^2 на уровень 10^{-28} см^2 – вот вам возможность попробовать их скомпенсировать!

И первый, кто начал думать об использовании реактора для нейтринной физики, был Бруно Понтекорво. Я покажу вам его работу 1946 года. Эта работа была опубликована в Канаде – в это время Бруно Понтекорво работал еще в Канаде, в Россию он попал только в 1949 году. Он впервые задумался о том, нельзя ли использовать для регистрации нейтрино обратные процессы. До него все смотрели только на бета-распады – распады, где нейтрино появляется, и все. А тут он предложил поискать процесс обратный, когда нейтрино попадает в ядро и что-то с ним происходит. Вот процессы, которые он рассматривал: я прямо беру кусочек на английском языке из его статьи. Точнее, из его канадского препринта 1946 года. И вот он приводит примеры – те самые примеры, которыми мы сегодня занимаемся. В 1946 году он приводит пример! В качестве примера, говорит он, можно рассмотреть такую реакцию: взять нейтрино, бросить на ${}^{37}_{17}\mathrm{Cl}$, получится β^{-} и ${}^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. А ${}^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ можно зарегистрировать, поскольку он превращается в хлор, время жизни 34 дня, и происходит K-захват. Это то, чем сегодня физики – в течение 30 лет даже – занимаются. Вот такая схема.

Но Понтекорво сделал еще одну поразительную вещь: дал программу исследований по физике нейтрино. Он сказал: давайте смотреть возможные источники нейтрино в мире. Такие источники могут быть следующие. Первое: нейтринные потоки от Солнца. Он их оценивал на уровне 10^{16} нейтрино (т.е. плотность потока нейтрино 10^{16} на 1 см^2 в 1 секунду), но сегодня мы знаем, что на уровне Земли это, самое лучшее, 10^{12}. Но все равно, не так уж плохо. – Значит, первый источник нейтрино, с которым можно работать экспериментаторам, это Солнце, – сказал в 1946 году Понтекорво. Второе – это реакторные нейтрино. Фрагменты, ядра, которые возникают после деления, являются источниками нейтрино. И, наконец, он еще предложил сам уран: металл, который вытаскивается из реактора, тоже может быть источником нейтрино. Ну, сейчас это не применяется. Во всяком случае, вот его программа (13 ноября 1946 года): давайте используем для исследования нейтрино три типа источников – солнечные нейтрино, реакторные нейтрино и нейтрино от ускорителей.

Вот так давно была эта программа сформулирована. И действительно, в 1956 году впервые проведены эксперименты в Америке: Рейнс, был такой физик, на американском реакторе сделал эксперимент и зарегистрировал первое нейтрино от реактора.

Именной комментарий

Вольфганг Эрнст Паули (1900–1958) – австрийский физик, ввел понятие спина элементарной частицы, предсказал существование нейтрино и сформулировал «принцип запрета». Лауреат Нобелевской премии по физике за 1945 год.

Нильс Хенрик Давид Бор (1885–1962) – датский физик, один из создателей современной физики (в частности, создатель первой квантовой теории атома и активный участник разработки основ квантовой механики). Лауреат Нобелевской премии по физике за 1922 год.

Антуан Анри Беккерель (1852–1908) – французский физик, один из первооткрывателей радиоактивности. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1903 год.

Эрнест Резерфорд (1871–1937) – британский физик, «отец» ядерной физики, создатель планетарной модели атома. Лауреат Нобелевской премии по химии за 1908 год.

Чарльз Друммонд Эллис (1895–1980) – английский физик.

Джеймс Чедвик (1891–1974) – английский физик, ученик Резерфорда; открыл нейтрон. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1935 год.

Лиза Мейтнер (1878–1968) – австрийский физик и радиохимик.

Отто Ган (1879–1968) – немецкий химик, «отец ядерной химии», открыл расщепление урана. Лауреат Нобелевской премии по химии за 1944 год.

Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шредингер (1887–1961) — австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1933 год (совместно с Полем Дираком).

Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984) – английский физик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1933 год (совместно с Эрвином Шредингером).

Вернер Карл Гейзенберг (1901–1976) – немецкий физик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1932 год.

Энрико Ферми (1901–1954) – итальянский физик, один из основоположников квантовой физики. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1938 год.

Дмитрий Владимирович Скобельцын (1892–1990) – советский физик-экспериментатор, специалист в области космических излучений и физики высоких энергий.

Дмитрий Дмитриевич Иваненко (1904–1994) – советский физик; работы в области ядерной физики, единой теории поля, теории гравитации и др.

Этторе Майорана (1906–1938) – итальянский физик; работы в области ядерной физики и теории нейтрино.

Арнольд Иоганн Вильгельм Зоммерфельд (1868—1951) — немецкий физик-теоретик; работы посвящены квантовой теории атома, спектроскопии, квантовой теории металлов, математической физике.

Герман Клаус Гуго Вейль (1885–1955) – немецкий математик; работы во многих областях математики и математической физики.

Ральф Крониг (1904–1995) – нидерландский физик; работы в области спектроскопии, квантовой механики, ядерной физики, физики твердого тела и др.

Карл Дэвид Андерсон (1905–1991) – американский физик; работы посвящены исследованию рентгеновских и гамма-лучей, физике космических лучей, физике элементарных частиц. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1936 год.

Ханс Альбрехт Бете (1906–2005) – немецкий и американский физик и астрофизик. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1967 год.

Рудольф Эрнст Пайерлс (1907–1995) – английский физик; работы по квантовой механике и квантовой электродинамике, ядерной физике, физике твердого тела и др.

Мария Гёпперт-Майер (1906–1972) – американский физик. Лауреат Нобелевской премии по физике (одна из двух женщин-лауреатов) за 1963 год (совместно с Хансом Йенсеном).

Бруно Максимович Понтекорво (1913–1993) – итальянский и советский физик; работы в области нейтринной физики, астрофизики и др.

Лев Давидович Ландау (1908–1968) – выдающийся советский физик-теоретик, основатель научной школы. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1962 год.

Джон Микаэль Робсон (1920–2000) – канадский физик; работы в области ядерной физики, физики и техники ядерных реакторов.

Петр Ефимович Спивак (1911–1992) – советский физик; работы в области ядерной физики и физики слабых взаимодействий.

Игорь Васильевич Курчатов (1903–1960) – советсткий физик, «отец» советской атомной бомбы, главный научный руководитель атомной проблемы в СССР.

Фредерик Рейнс (1918–1998) – американский физик. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1995 год «за экспериментальное обнаружение нейтрино».

(Продолжение статьи – в следующем номере журнала)

Геометрия на паркете

В.ДУБРОВСКИЙ

В современной геометрии паркеты, или замощения, т.е. покрытия плоскости многоугольниками без пробелов и перекрытий, служат предметом самостоятельного изучения. В этой статье мы увидим, как их можно использовать в качестве инструмента для доказательства «обычных», даже классических теорем, изначально не имеющих ничего общего с замощениями. Доказательства, которые мы будем обсуждать, вовсе не единственные и даже не самые короткие. Но они, безусловно, красивы, и я надеюсь, что они доставят читателям такое же удовольствие, как и автору.

Начнем с двух простейших паркетов, которые показаны на рисунке 1. Это замощения плоскости параллелограммами и треугольниками. Первое получается,

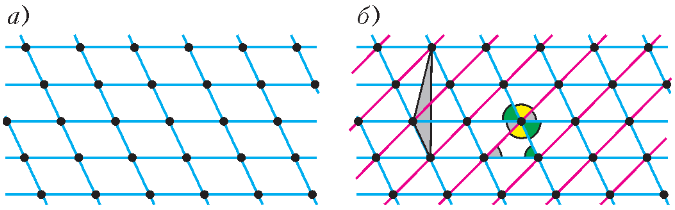


Рис. 1

если разделить плоскость на параллелограммы двумя семействами параллельных и равноотстоящих прямых. Второе получается, если разрезать все эти параллелограммы параллельными диагоналями. Ясно, что в качестве плиток паркета можно использовать равные параллелограммы любого размера и формы, и то же справедливо для треугольников. (Плитками называют многоугольники, из которых составляется паркет. В паркетах на рисунке 1 все плитки одинаковы; ниже мы встретимся и с паркетом из нескольких разных видов плиток.)

Даже самый простой – треугольный – паркет может проиллюстрировать одну из фундаментальных теорем геометрии. Посмотрите еще раз на рисунок 1,*б*. Понятно ли, о какой теореме идет речь? Уверен, что да. Это теорема о сумме углов треугольника. На рисунке углы шести плиток уложены вокруг их общей вершины без зазоров и наложений. А так как каждый угол плитки встречается дважды среди этих шести углов, то сумма углов плитки равна $180°$.

Итак, мы сумели обнаружить важный геометрический факт «методом пристального взгляда» на замощение; этот метод еще не раз пригодится нам в дальнейшем. Попутно наш простой пример поясняет, почему замощения оказываются полезными при поиске и доказательстве геометрических фактов: когда фигура окружена своими копиями, то выявляются связи между ее элементами, которые до этого было трудно увидеть.

Есть еще одно интересное соображение технического характера; оно требует более подробного объяснения.

Измерение площадей подсчетом узлов

Рассмотрим паркет из параллелограммов и произвольную фигуру на плоскости. Площадь этой фигуры приблизительно равна числу содержащихся в ней плиток, умноженному на площадь плитки. Чем меньше плитки, тем точнее это равенство. Здесь мы считаем, что плитки измельчаются, а фигура фиксирована. Но можно представить, что фиксирован паркет, а фигура раздувается, сохраняя форму. Тогда, считая площадь плитки равной 1, получим, что площадь фигуры примерно равна числу плиток, целиком лежащих внутри нее. И чем больше раздута фигура, тем меньше относительная погрешность такого измерения.

Но вместо плиток можно считать точки – вершины плиток! Множество вершин всех параллелограммов нашего паркета называется *решеткой*, а сами вершины – ее *узлами*. Каждый узел решетки – это левая нижняя вершина какого-то (и только одного) параллелограмма из соответствующего замощения. Поэтому число узлов внутри фигуры не меньше числа параллелограммов, содержащихся в ней, и не больше числа параллелограммов, которые имеют с ней общие точки. Значит, опять принимая площадь одного параллелограмма за единицу (давайте договоримся и дальше так считать, если специально не оговорено иное), мы можем сказать, что площадь фигуры приблизительно равна числу узлов, которые она покрывает.

«Раздувая» фигуру, можно сделать относительную погрешность этого равенства сколь угодно малой, но идеальной точности для всех фигур достичь нельзя. Однако для некоторых типов фигур подсчет узлов позволяет вычислить площадь абсолютно точно. Одну из таких формул дает **теорема Пика:** *площадь многоугольника с вершинами в узлах решетки равна* $i + b/2 - 1$, *где* i *– число узлов внутри многоугольника, а* b *– число узлов на его границе*. Об этой формуле мы еще вспомним (см. также статью Н.Б.Васильева «Вокруг формулы Пика»[1]), но здесь будем пользоваться другим способом вычисления площадей.

Пусть нам нужно вычислить площадь некоторой фигуры, копиями которой можно замостить плоскость. Наложим это замощение на решетку единичных параллелограммов. Рассмотрим простейший случай, когда

[1] Опубликована в «Кванте» №12 за 1974 г. и в выпуске 125 «Библиотечки «Квант».

каждая плитка нового замощения покрывает одно и то же число n узлов решетки, но ни один из них не лежит на ее границе. Тогда площадь s одной фигуры-плитки просто равна n. Докажем это.

В самом деле, рассмотрим круг радиуса R с фиксированным центром O. Пусть внутри него лежит $N = N(R)$ плиток. Тогда площадь круга, πR^2, приблизительно равна Ns (это утверждение справедливо для замощения параллелограммами, о чем было сказано выше, но, конечно, и для любого другого паркета из одинаковых плиток). Более точно, отношение $\pi R^2/N$ стремится к s при R, стремящемся к бесконечности. Но с другой стороны, как мы видели выше, площадь круга примерно равна числу узлов внутри него, которое, в свою очередь, приблизительно равно Nn, другими словами, отношение $\pi R^2/N$ стремится к n. Следовательно, $s = n$.

Похожее рассуждение применимо и тогда, когда некоторые узлы попадают на границы плиток. Но в этом случае при подсчете числа узлов, покрытых одной плиткой, каждый граничный узел нужно учитывать с коэффициентом $1/k$, где k – число плиток, на границе которых лежит этот узел (а каждый внутренний узел – по-прежнему с коэффициентом 1). Тогда, складывая все эти коэффициенты по всем N плиткам внутри круга, мы учтем каждый граничный узел k раз (по одному разу на каждую плитку, на границе которой он лежит). Но вклад от каждого раза равен $1/k$, значит, суммарный вклад одного граничного узла равен 1. Получается, что число узлов внутри круга (приблизительно) равно Nn, где n – сумма коэффициентов всех узлов, лежащих внутри или на границе одной плитки, что опять дает равенство $s = n$.

В качестве примера снова рассмотрим замощение плитками-параллелограммами, показанное на рисунке 1,*а*. На каждую плитку попадает 4 узла, но и каждый узел, в свою очередь, покрыт четырьмя плитками, поэтому среднее число узлов на плитку равно 1, а это и есть площадь плитки. Более интересный пример получается, если рассмотреть треугольник с вершинами в узлах решетки, на границе и внутри которого других узлов нет (пример – закрашенный треугольник на рисунке 1,*б*). Покажем, что площадь любого такого треугольника равна $1/2$, т.е. половине площади параллелограмма, порождающего решетку – ведь эта площадь, как мы договаривались, равна 1.

Замостим плоскость копиями этого треугольника (рис. 2; для наглядности мы раскрасили их в шахматном порядке). Тогда все вершины этих треугольников замощения попадут в узлы решетки, а внутри треугольников не окажется узлов. (Докажите это самостоятельно при помощи такого факта: если сдвинуть всю решетку на вектор $\overrightarrow{AB}$, где A и B – ее узлы, то она совместится сама с собой.) Каждый треугольник покрывает три узла, а каждый узел принадлежит шести треугольникам, поэтому на каждый треугольник приходится по $3/6 = 1/2$ узла, а значит, его площадь равна $1/2$. Теперь вы можете попробовать доказать формулу Пика: для этого надо разрезать многоугольник с вершинами в узлах решетки на треугольники вроде тех, которые мы только что рассматривали, и найти число этих треугольников (можно подсчитать сумму всех их углов).

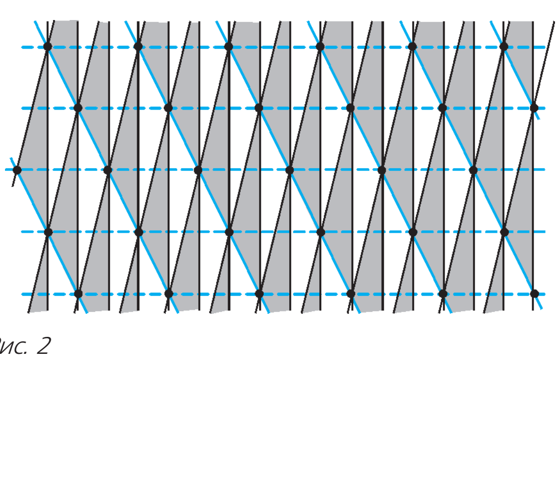


Рис. 2

Подобный метод вычисления площади плитки применим, когда замощение плитками и решетка связаны друг с другом следующим образом: любое движение, переводящее одну плитку в другую, переводит всю решетку в себя. Это условие гарантирует, что во всех плитках узлы расположены одинаково.

Упражнение 1. Две противоположные стороны параллелограмма единичной площади разделены на n равных частей, другие две стороны – на m равных частей. Точки разбиения соединены двумя способами, как показано на рисунке 3. Найдите площади маленьких параллелограммов в обоих случаях.

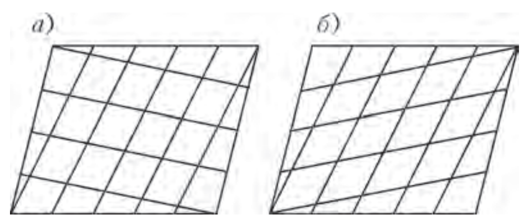


Рис. 3

В упражнении 1 решетка была дана в условии. Но иногда, как, например, в следующем упражнении, подходящую решетку приходится строить.

Упражнение 2. Точки A_1, B_1, C_1 расположены соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC так, что $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

Теорема Пифагора

Знакомство с применениями паркетов мы продолжим необычным доказательством теоремы Пифагора.

Возьмем квадраты со сторонами, равными катетам a и b некоторого прямоугольного треугольника. Замостим ими плоскость, как показано на рисунке 4. Левая нижняя вершина каждого квадрата со стороной a также является правой нижней вершиной одного из квадратов со стороной b. Покрасим все эти точки в красный цвет. Красные точки образуют квадратную решетку (докажите это!), причем сторона квадрата этой решетки равна гипотенузе нашего прямоугольного треугольника – посмотрите на синий треугольник. Теперь заметим, что, объединив квадраты

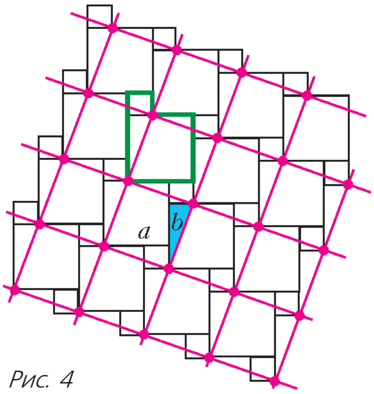


Рис. 4

замощения парами, мы получим паркет из одинаковых невыпуклых плиток (одна из которых обведена зеленым на рисунке 4). Каждая такая плитка покрывает два красных узла, а каждый красный узел покрыт двумя плитками, т.е. на одну плитку в среднем приходится один узел красной решетки. А это означает, что площадь каждой плитки, т.е. сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади красного квадрата, а это и есть теорема Пифагора.

Отметим еще, что из нашего замощения видно, как разрезать плитку из двух квадратов на части, из которых можно сложить красный квадрат: нужно просто резать по красным линиям. Это дает еще одно доказательство теоремы Пифагора. Вообще, большинство задач на площади в этой статье можно решить двумя способами: подсчетом узлов или разрезанием и перекладыванием частей. Вы можете выбирать, какой способ вам больше по душе.

Четырехугольники и шестиугольники

Много интересного можно получить, рассматривая другие типы замощений. Начнем с паркета из четырехугольников произвольной формы. Чтобы его получить, возьмем простейшее замощение параллелограммами (показанное красным на рисунке 5) и отметим в

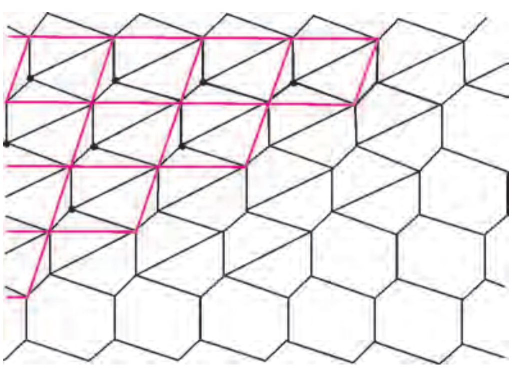


Рис. 5

каждом из них по точке так, чтобы эти точки одинаково располагались во всех параллелограммах (как слева вверху на рисунке). Отмеченные точки образуют решетку, равную исходной. Соединим каждую отмеченную точку с вершинами ее параллелограмма и сотрем красные линии (стороны параллелограммов). Получится паркет из равных выпуклых четырехугольников (средняя часть рисунка 5). Такой паркет можно построить из копий любого выпуклого четырехугольника (докажите это самостоятельно, начав описанное выше построение с паркета из параллелограммов со сторонами, равными и параллельными диагоналям данного четырехугольника). Между прочим, такой способ годится и для невыпуклых четырехугольников, только каждую отмеченную точку надо соединять с вершинами параллелограмма, *не содержащего* эту точку (скажем, лежащего на n полос ниже ее или на m полос правее). Попробуйте порисовать такие замощения и проверьте, сохраняют ли для них силу приводимые ниже рассуждения.

Любые две четырехугольные плитки нашего замощения, имеющие общую сторону, симметричны относительно середины этой стороны. Красные линии (стороны параллелограммов) разрезают каждую из плиток на пару треугольников. Из треугольников, полученных разрезанием двух соседних плиток, можно составить один красный параллелограмм. Получается, что площадь плитки равна половине площади параллелограмма. Проверьте это и подсчетом узлов! Еще один простой вывод из рассматриваемой конструкции такой: для любой точки P в параллелограмме $ABCD$ сумма площадей треугольников PAB и PCD равна сумме площадей треугольников PBC и PDA. Действительно, обе пары треугольников получаются разрезанием одного и того же четырехугольника по разным диагоналям.

Это свойство пар треугольников почти очевидно, но в случае квадрата $ABCD$ оно имеет обобщение, доказательство которого скорее всего, потребует серьезных размышлений.

Упражнение 3 (В. Произволов). Внутри большого квадрата лежит меньший (рис. 6). Вершины квадратов соединены, как показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей синих четырехугольников равна сумме площадей красных.

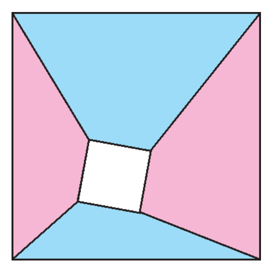


Рис. 6

Следующие упражнения показывают, что круг ситуаций, в которых применимы замощения, шире, чем можно было бы подумать, основываясь только на рассмотренных выше примерах.

Упражнения

4. Докажите, что длина средней линии четырехугольника (отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон) не превосходит полусуммы длин двух других сторон, причем равенство достигается, только если эти две стороны параллельны.

5. В Древнем Египте площади четырехугольников вычисляли как произведение полусумм длин противоположных сторон. Докажите, что такой способ дает правильный результат только для прямоугольников.

6 (М1169). Пусть P – произвольная точка в прямоугольнике $ABCD$. Докажите, что его площадь не превосходит величины $PA \cdot PC + PB \cdot PD$. (*Подсказка*: чтобы доказать это при помощи замощений, нужно подправить конструкцию замощения четырехугольниками, которую мы обсуждали выше.)

Вернемся к рисунку 5. Если стереть общую сторону каких-то двух соседних плиток и все параллельные ей стороны других плиток, то останется паркет из шестиугольников. У каждого из них есть центр симметрии (середина стертой стороны) и их противоположные стороны равны и параллельны. Очевидно, такой паркет можно составить из копий любого центрально-симметричного шестиугольника.

Упражнение 7. Дан центрально симметричный шестиугольник. Три его вершины, взятые через одну, образуют треугольник. Докажите, что его площадь равна половине площади шестиугольника.

Теорема Наполеона

В завершение мы докажем замечательную теорему, приписываемую Наполеону Бонапарту.

Теорема. *Пусть снаружи произвольного треугольника ABC построены на его сторонах правильные треугольники CAB_1, BCA_1, ABC_1 (рис.7). Тогда их центры P, Q, и R образуют правильный треугольник.*

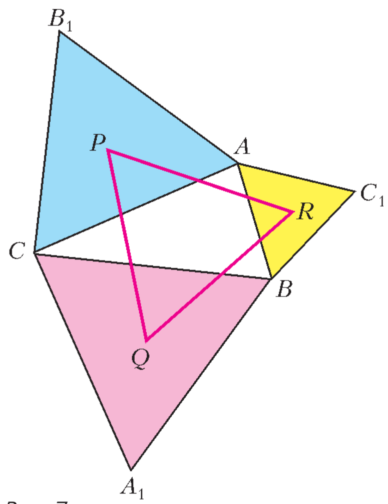


Рис. 7

Британский математик Дж.Ф.Ригби придумал, как встроить «конфигурацию Наполеона» в замощение всей плоскости; оно показано на рисунке 8: все белые треугольники в нем равны данному треугольнику ABC, а цветные – соответствующим правильным треугольникам, построенным на его сторонах. Получить из него теорему Наполеона можно, заметив, что оно переходит в себя при повороте на 120° вокруг центра любого из цветных правильных треугольников. Отсюда следует, что, например, центры всех розовых треугольников образуют решетку из правильных треугольников, центры которых совпадают с центрами голубых или желтых треугольников (эта решетка не нарисована, чтобы не загромождать чертеж). Например, треугольники SQM и SQN правильные, потому что они переходит в себя при поворотах на 120° вокруг точек R и P соответственно. Но тогда, очевидно, и центры всех цветных треугольников образуют решетку из правильных треугольников (показанную красными линиями); в частности, «треугольник Наполеона» PQR правильный, что и требовалось доказать.

Справедливости ради надо сказать, что «очевидность» этого доказательства несколько обманчива: мы приняли на веру, что «паркет Ригби» действительно

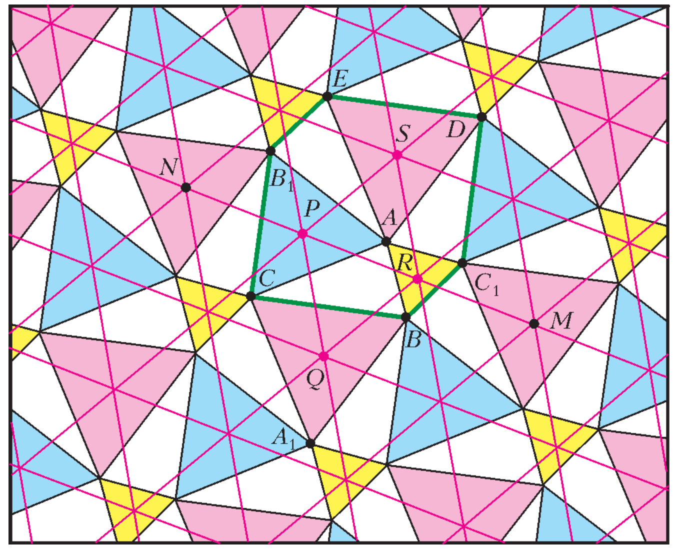


Рис. 8

существует. Поясним, как его построить. Рассмотрим треугольник ABC и правильные треугольники ABC_1 и CAB_1 на двух его сторонах и построим треугольники AC_1D и EB_1A, равные треугольнику ABC (они получаются из ABC поворотами на 120° вокруг центров R и P треугольников ABC_1 и CAB_1 по и против часовой стрелки соответственно; см. рис. 8). Заметим, что $AD = BC = AE$, а $\angle DAE = 60°$ (так как сумма углов «белых» треугольников при вершине A равна сумме углов треугольника ABC, т.е. 180°). Значит ADE – правильный треугольник. Вектор $\overrightarrow{BC}$ получается из $\overrightarrow{AD}$ поворотом на 120° вокруг R; но и вектор $\overrightarrow{DE}$ получается из $\overrightarrow{AD}$ поворотом на 120° (вокруг S). Поэтому $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1D}$ и $\overrightarrow{B_1E} = \overrightarrow{BC_1}$. Таким образом, противоположные стороны шестиугольника BCB_1EDC_1 равны и параллельны, а такими шестиугольниками можно замостить всю плоскость.

Теорема Наполеона доказана, а в награду за труды мы получим еще и формулу для вычисления площади треугольника Наполеона PQR. Центры всех цветных треугольников нашего паркета можно рассматривать как узлы решетки из ромбов (каждый из которых состоит из двух правильных треугольников). Будем считать, что площадь ромба равна 1, т.е. площадь треугольника PQR равна $1/2$. Площадь шестиугольника найдем подсчетом узлов: внутри него лежат три узла решетки, а на его границе узлов нет, поэтому его площадь равна 3, т.е. в шесть раз больше, чем площадь треугольника PQR. Но шестиугольник состоит из трех копий треугольника ABC и трех равносторонних треугольников, построенных на его сторонах. В итоге получаем такую формулу:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{\sqrt{3}}{24}\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right).$$

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2334» или «Ф2340». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2334 предлагалась на VI Олимпиаде имени Л.Эйлера, задача М2337а) – на региональном этапе XL Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2338, М2340 – на XVII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи Ф2340, Ф2341, Ф2343–Ф2347 предлагались на Московской физической олимпиаде 2014 года.

Задачи М2334–М2340, Ф2340–Ф2347

М2334. Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые – тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?

О.Нечаева

М2335. По кругу расположены n луночек, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из луночек. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из луночки, в которой он находится, на k луночек по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению). При каких n Петя может играть так, чтобы через несколько ходов шарик: а) гарантированно попал в отмеченную луночку; б) гарантированно попал либо в отмеченную луночку, либо в одну из соседних с отмеченной луночек?

А.Толпыго

М2336. Даны положительные числа x и y, $x < y$. Для любых чисел a, b, c, принадлежащих отрезку $[x;\ y]$, докажите неравенство

$$\frac{a^2}{bc+xy}+\frac{b^2}{ca+xy}+\frac{c^2}{ab+xy}\geq\frac{a+b+c}{x+y}.$$

Д.Аубекеров (Казахстан)

М2337. Имеются n карточек, на которых написана цифра 1, и n карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек $2n$-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше? Решите задачу: а) для $n = 2013$; б) для любого заданного $n \geq 11$.

П.Кожевников

М2338. Существует ли на плоскости такое множество точек, что внутри любого треугольника площади 1 окажется конечное непустое множество точек из этого множества?

Фольклор

М2339. Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, такие, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски путем нескольких описанных операций.

В.Мокин

М2340*. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω (рис.1). Пусть I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно. Каждая из окружностей γ_B, γ_D прохо-

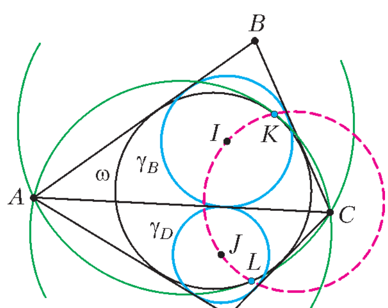


Рис. 1

дит через точки A и C. Эти окружности касаются окружности ω в точках K и L. Докажите, что точки I, J, K, L лежат на одной окружности.

Ф.Ивлев

Ф2340. Подходящий к станции поезд движется со скоростью v = 36 км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равнозамедленно с ускорением, равным по модулю $a = 2$ м/с^2. Чемодан при этом стал скользить по полу и прошел до своей полной остановки путь s = 12 м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.

М.Ромашка

Ф2341. На горизонтальной поверхности лежит стопка кирпичей так, как показано на рисунке 2. Площадь соприкасающихся участков кирпичей очень мала (много меньше площадей всех граней кирпичей). Все кирпичи однородные и имеют один и тот же вес P = 24 Н. Вычислите, с какой силой каждый кирпич из нижнего ряда давит на поверхность.

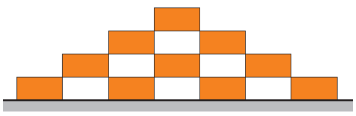


Рис. 2

М.Ромашка

Ф2342. Ванна на ножках в форме прямоугольного параллелепипеда может заполняться водой из крана, а выходит вода из нее через сливное отверстие в дне ванны прямо на пол. Если сливное отверстие закрыто, то при полностью открытом кране первоначально пустая ванна заполнится водой до максимального уровня H_0 за время t_1 = 10 мин. Если кран закрыть и открыть сливное отверстие, то изначально полная водой ванна опорожнится за время t_2 = 20 мин. Каким будет уровень воды в первоначально пустой ванне через $t_3 = 5$ мин, если одновременно полностью открыть кран и оставить открытым сливное отверстие? Как изменится ответ, если в ванну с открытым сливным отверстием вдобавок к первому крану одновременно подавать воду из второго (точно такого же) полностью открытого крана? Через какое время после начала эксперимента вода начнет переливаться через края ванны в случае работы двух кранов?

Примечание. Решать дифференциальные уравнения аналитически не нужно! Воспользуйтесь компьютером.

Фольклор

Ф2343. В распоряжении школьника Вовы имеется водопроводная вода с температурой 20 °C, чайник мощностью 1,2 кВт и вместительностью 1,5 л, электрокипятильник мощностью 500 Вт, а также большой калориметр, в котором требуется получить 100 л кипятка с температурой 100 °C. Как сделать это за наименьшее время? Вова предложил следующий план действий: нужно налить в калориметр некоторый начальный объем воды V_0, опустить туда включенный кипятильник и одновременно кипятить воду в чайнике, доливая из него в калориметр порции кипятка по мере его готовности. Определите, каким должен быть начальный объем V_0 и за какое время τ удастся получить в калориметре 100 л кипятка, действуя указанным способом. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°С), плотность воды 1 г/см^3. Теплоемкостью калориметра, потерями тепла в окружающую среду и временем, затраченным на наполнение чайника и выливание из него кипятка, можно пренебречь.

М.Ромашка

Ф2344. Знайка решил провести исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более аккуратно. Для этих целей он взял цилиндрический сосуд большого объема с поршнем, который мог двигаться практически без трения, вынул поршень и охладил сосуд и поршень до температуры 200 К. Затем он вставил поршень обратно в сосуд так, что внутри оказался охлажденный до той же температуры воздух, обеспечил постоянное давление и провел измерения зависимости объема V газа в сосуде от температуры T. По полученным результатам Знайка построил график (рис.3). Найденная зависимость мало напоминала результаты, полученные Гей-Люссаком. Знайка

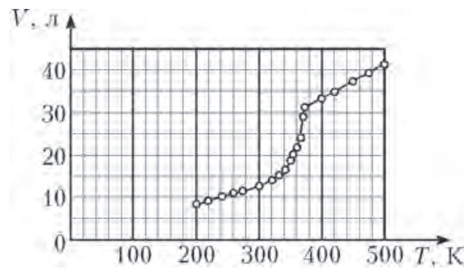


Рис. 3

понял свою ошибку. Он вставил поршень в цилиндр при температуре 200 К, и, очевидно, на дне сосуда при этом оказалось некоторое количество льда, который образовался из воды, сконденсировавшейся при охлаждении воздуха. Оцените массу льда, который оказался в цилиндре у Знайки, если давление в течение опыта было $2 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса воды 18 г/моль.

В.Крыштоп

Ф2345. Два одинаковых вольтметра соединили параллельно, третий вольтметр подключили к этой комбинации последовательно и к концам получившейся цепи присоединили идеальную батарейку. При этом вольтметры показывали 4 В, 4 В и 5 В. Каково напряжение батарейки? Могут ли быть одинаковыми все три вольтметра? Что покажут эти же приборы, если их все соединить последовательно и подключить к той же батарейке? Показания приборов считайте точными.

А.Зильберман

Ф2346. В цепи, схема которой изображена на рисунке 4, по очереди замыкают ключи $K_1 - K_5$, выжидая каждый раз достаточно длительное время до окончания процессов зарядки конденсаторов. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся в резисторе R после замыкания ключа K_1 и ключа K_5? До

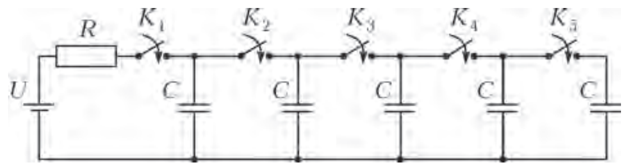


Рис. 4

замыкания каждого из этих ключей все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.

М.Семенов

Ф2347. Тележка высотой H = 30 см и длиной L = 40 см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно (рис.5). К крышке стола снизу прикрепили легкую

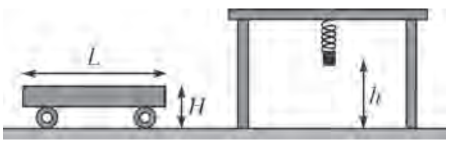


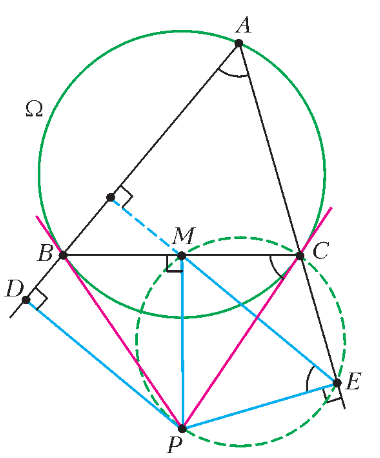
Рис. 5

пружину жесткостью k = 50 Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой m = 0,4 кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте h = 42 см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

М.Ромашка

Решения задач М2316–М2325, Ф2323–Ф2332

М2316. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.*



Пусть M – середина BC. Треугольник BPC равнобедренный ($BP = PC$ как отрезки касательных); значит, его медиана PM является высотой. Так как $\angle PMC = \angle PEC = 90°$, четырехугольник $MCEP$ – вписанный; значит, $\angle MEP = \angle MCP$. Далее, CP – касательная к Ω, поэтому $\angle MCP = \angle BAC$. Получаем, что $\angle MEP = \angle BAC$. Значит, $\angle MEA + \angle BAC = (90° - \angle MEP) + \angle BAC = 90°$, откуда $ME \perp AB$ (см. рисунок).
Аналогично доказывается, что $MD \perp AC$. Это и значит, что M – точка пересечения высот треугольника ADE.

П.Кожевников

М2317. *Существует ли такое натуральное n, что число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$ для любых: а) ненулевых; б) ненулевых четных; в) нечетных цифр a и b? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.)*

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

а), б) Предположим, что такое число n существует. Тогда $\overline{2n4} \vdots 24 \vdots 8$ и $\overline{4n8} \vdots 48 \vdots 8$. Но разность $\overline{4n8} - \overline{2n4}$ не делится на 8, поскольку имеет тройку последних цифр 004 или 204 (если n состоит из одной цифры).

в) Вначале докажем следующую известную **лемму**: *пусть N – натуральное число, не делящееся на 2 и на 5; тогда существует число, записываемое одними единицами, которое делится на N.*

Действительно, рассмотрим $N+1$ чисел вида $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{N+1}$. Выберем два из них, $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{l}$, $k > l$, дающие один и тот же остаток при делении на N. Тогда разность $\underbrace{11\ldots1}_{k} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = \underbrace{11\ldots1}_{k-l} \cdot 10^l$ делится на N. Так как НОД$(N, 10) = 1$, то $\underbrace{11\ldots1}_{k-l}$ делится на N.

Перейдем к решению задачи. Пусть T – множество всех натуральных чисел, меньших 100 и не делящихся ни на 2, ни на 5. Пусть N равно произведению всех чисел множества T.

Найдем такое s, что число $m = \underbrace{11\ldots1}_{s}$ делится на N, и покажем, что $n = \underbrace{77\ldots7}_{s} = 7m$ удовлетворяет условию задачи. Пусть a и b – некоторые нечетные цифры. Тогда число

$$\overline{anb} = \overline{an0} - 10a + \overline{ab} = 10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) + \overline{ab}$$

делится на $\overline{ab}$ одновременно с числом

$$10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) = 10\,(a \cdot \underbrace{99\ldots9}_{s} + \underbrace{77\ldots7}_{s}\,) =$$

$$= 10m\,(9a + 7).$$

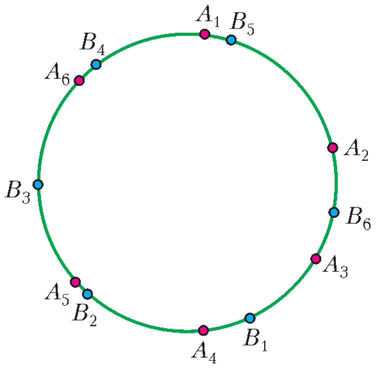
Если $\overline{ab}$ не делится на 5, то по построению число m делится на $\overline{ab}$. Если $\overline{ab} = 5k$, где k не делится на 5, то m делится на k, а значит, $10m(9a+7)$ делится на $5k$. Наконец, если $\overline{ab}$ делится на 25, то имеется единственная возможность: a = 7, b = 5. В таком случае $10m(9a+7) = 700m$ делится на $\overline{ab}$ = 75 (так как m делится на 3).

В.Сендеров

М2318. *На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)*

Мы будем считать, что радиус окружности равен 1, а поворот происходил по часовой стрелке. Если две новые точки лежат на одной старой дуге, то новая дуга между ними – требуемая. Предположим, что таких новых точек нет. Так как есть n старых дуг и n новых точек, это возможно только в случае, когда на каждой старой дуге лежит ровно по одной новой точке (причем эти точки не совпадают с концами старых дуг).

Занумеруем старые точки по часовой стрелке $A_1, A_2, \ldots, A_n$; пусть при повороте точка A_i переходит в новую точку B_i (мы считаем нумерацию циклической, т.е. $A_{n+i} = A_i$ и $B_{n+i} = B_i$). Пусть точка B_1 лежит на дуге A_jA_{j+1} (см. рисунок – для $n = 6$, $j = 3$); так как на каждой старой дуге ровно по одной новой точке, соседние точки попадали на соседние дуги. Получаем, что при любом i точка B_i лежит на дуге $A_{j+i-1}A_{j+i}$.



Предположим, что $j \le k$. Заметим, что все дуги вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ покрывают окружность ровно в j слоев; значит, сумма их длин равна $2\pi j \le 2\pi k$. С другой стороны, длина дуги $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ строго больше длины дуги A_iB_i, которая равна $2\pi k/n$; значит, сумма их длин строго больше чем $n \cdot 2\pi k/n = 2\pi k$; противоречие.

Аналогично, если $j > k$, то сумма длин всех дуг вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j-1}$ равна $2\pi(j-1) \ge 2\pi k$; с другой стороны, она строго меньше, чем сумма длин дуг вида A_iB_i, которая равна $2\pi k$. Опять получаем противоречие.

И.Митрофанов

M2319. *На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?*

Ответ: 99.

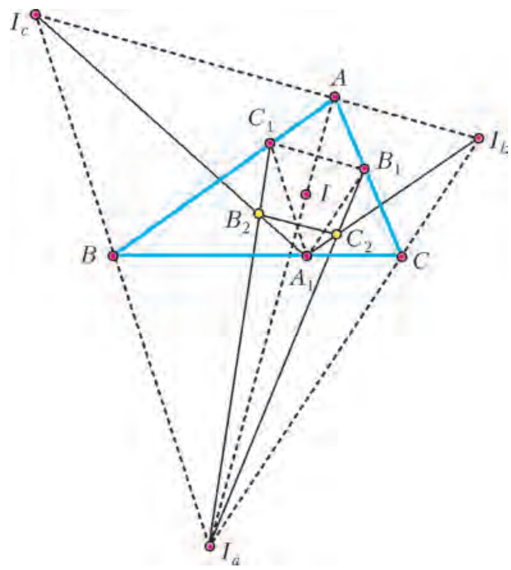
Если положить $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i$ при $i = 1, 2, \ldots, 99$, то $b_1 = b_{100} = 3$, так что среди чисел b_i будет не больше 99 различных.

Осталось доказать, что среди чисел b_i всегда найдутся 99 различных чисел. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Пусть d_i – наибольший общий делитель всех 99 исходных чисел, кроме a_i; тогда $b_i = a_i + d_i$. Пусть d_k – наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{100}$. Тогда при $i \ne k$ числа a_i делятся на d_k. Следовательно, при $i < j$, $i \ne k$ и $j \ne k$ разность $a_j - a_i$ также делится на d_k. Поскольку она положительна, $a_j - a_i \ge d_k \ge d_i$. Поэтому $b_j > a_j \ge a_i + d_i = b_i$, откуда $b_i \ne b_j$. Итак, мы установили, что $b_j \ne b_i$ при $i \ne k$ и $j \ne k$. Стало быть, все 99 чисел b_i при $i \ne k$ различны.

С.Берлов

M2320. *Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, CA, AB соответственно. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 – в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.*

Прямые B_1C_1 и I_bI_c параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны биссектрисе AI угла BAC (см. рисунок). Аналогично, $C_1A_1 \parallel I_cI_a$ и $A_1B_1 \parallel I_aI_b$; значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $I_aI_bI_c$ подобны. Треугольники $A_1C_1B_2$ и $I_cI_aB_2$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Аналогично, $\Delta A_1B_1C_2 \sim \Delta I_bI_aC_2$. Из этих подобий следуют равенства $\dfrac{I_aB_2}{C_1B_2} = \dfrac{I_aI_c}{A_1C_1} = \dfrac{I_aI_b}{A_1B_1} = \dfrac{I_aC_2}{B_1C_2}$. Заметим, что точки B_1 и C_1 симметричны относительно прямой AI_a; поскольку $\dfrac{I_aB_2}{C_1B_2} = \dfrac{I_aC_2}{B_1C_2}$, точки B_2 и C_2 также симметричны относительно нее, и $IB_2 = IC_2$. Аналогично получаем $IA_2 = IB_2 = IC_2$, что и требовалось доказать.



Л.Емельянов, П.Кожевников, А.Полянский

M2321. *Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … – последовательность простых чисел в порядке возрастания. Пусть $P_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k$ – произведение первых k простых чисел, а $Q_k = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_{k+1}$ – произведение первых k нечетных простых чисел. Найдите все натуральные $k > 1$ такие, что число: а) $P_k - 1$; б) $Q_k - 1$; в) $P_k + 1$ является точной (большей, чем первая) степенью натурального числа. г) При каких k число $Q_k + 1$ является степенью двойки?*

Решим задачу для всех натуральных k. В этом случае ответ такой.

Ответ: а) 1; б) таких k не существует; в) таких k не существует; г) 1, 2.

а) Предположим, $n \ge 2$ и

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_k = a^n + 1. \qquad (1)$$

Если $a = 1$, то $a^n + 1 = 2$ и, следовательно, $k = 1$ (значение $k = 1$ нам подходит).

Предположим теперь, что $a > 1$; тогда $k > 1$. Число a нечетно, поэтому у него существует нечетный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства (1) делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n – простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a – на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку $a^2 + 1$ не может делиться на $3 = p_2$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 < i \le k$. Тогда $\left(a^{p_i} + 1\right) \vdots\, p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $\left(a^{p_i} - a\right) \vdots\, p_i$. Значит, число $a + 1 = \left(a^{p_i} + 1\right) - \left(a^{p_i} - a\right)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)\left(1 - a + \dots + a^{p_i - 1}\right)$, где $a + 1 \vdots\, p_i$ и

$$1 - a + \dots + a^{p_i - 1} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1 + a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > p_1 p_2 \dots p_k$, что противоречит равенству (1).

б) Пусть $n \ge 2$ и

$$3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_{k+1} = a^n + 1. \qquad (2)$$

Возможны два случая.

Случай 1: число a является степенью двойки. Заметим, что степени двойки дают лишь остатки 1, 2 и 4 при делении на 7, а $a^n + 1$ делится на 7 при $k \ge 3$. Значит, $k \le 2$, и возможными значениями для a^n являются лишь $3 - 1 = 2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$. Оба варианта не подходят.

Случай 2: у числа a существует нечетный простой делитель q. Этот случай разбирается так же, как пункт а).

в) Пусть $n \ge 2$ и

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_k = a^n - 1. \qquad (3)$$

Заметим, что $a > 1$ – нечетно. При четном n ($n = 2m$) правая часть равенства (3) является произведением четных чисел $\left(a^m + 1\right)$ и $\left(a^m - 1\right)$, поэтому делится на 4, что невозможно.

При нечетном $n > 1$ аналогично пункту а) доказываем, что $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда

$$a^n - 1 > \left(p_k + 1\right)^{p_k} - 1 > p_k^{p_k} > p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

г) Пусть

$$3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_{k+1} = 2^n - 1. \qquad (4)$$

Проверка показывает, что $k = 1, 2$ удовлетворяют условию. Пусть $k \ge 3$. Так как $\left(2^n - 1\right) \vdots\, 3$, то $n \vdots\, 2$. Так как $\left(2^n - 1\right) \vdots\, 7$, то $n \vdots\, 3$. Получаем, что $n \vdots\, 6$. Но если $n = 6t$, то $\left(2^{6t} - 1\right) \vdots \left(2^6 - 1\right) \vdots\, 9$. Противоречие.

Замечание. Решение пункта г) с заменой степени двойки на точную степень натурального числа автору неизвестно.

В.Сендеров

М2322. *Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов, каждый в натуральное число рублей, так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать?*

Ответ: сможет.

Заметим, что $9^4 = 6561 > 6543$. Покажем, что можно выбрать 12 номиналов так, чтобы с помощью не более чем 8 монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 6560 рублей.

Покажем сначала, как выпустить монеты трех номиналов, чтобы с помощью не более чем двух монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 8 рублей. Пусть номиналы равняются 1, 3 и 4 рублям. Тогда 1 = 1, 2 = 1 + 1, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 4 + 1, 6 = 3 + 3, 7 = 4 + 3 и 8 = 4 + 4.

Пусть теперь Монетный двор изготовит монеты с номиналами 9^k, $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ рублей при $k = 0, 1, 2, 3$. Любое число N от 1 до 6560 единственным образом представляется в виде $N = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0$, где числа a_k могут принимать значения от 0 до 8. (Фактически, это представление числа N в девятеричной системе счисления.) Как показано выше, сумма $a_k \cdot 9^k$ может быть получена не более чем двумя монетами. Таким образом, вся сумма N может быть получена не более чем $4 \cdot 2 = 8$ монетами указанных номиналов, что и требовалось.

О.Подлипский

М2323. *На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая: а) незамкнутая; б*) замкнутая n-звенная несамопересекающаяся ломаная, что на каждой из n данных прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.*

Приведем решение этой задачи, опубликованное в журнале «American mathematical monthly» в статье «Every Simple Arrangement of n Lines Contains an Inducing Simple n-gon» авторов E.Ackerman, R.Pinchasi, L.Scharf, M.Scherfenberg (на эту статью обратил наше внимание А.Акопян).

Пусть V – множество точек пересечения пар прямых.

а) Возьмем начальную точку нашей ломаной на одной из данных прямых l_1 (и не принадлежащую множеству V) и пойдем по прямой l_1 в том направлении, в котором на ней есть хотя бы еще одна точка из V, пока не придем в некоторую точку из V – пусть это точка пересечения l_1 с другой данной прямой l_2. Временно сотрем прямую l_1 и далее пойдем по прямой l_2 в том направлении, в котором на ней есть хотя бы одна точка из V, пока впервые не придем в точку из множества V. Пусть, скажем, мы пришли в точку пересечения прямой l_2 с данной прямой l_3. Сотрем прямую l_2 и повторим шаг, т.е. пойдем по l_3 до оче-

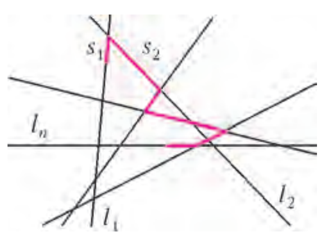


Рис. 1

редной точки пересечения, и т.д. Наконец, пройдем небольшое расстояние по последней еще не стертой прямой l_n (рис.1).

В результате построена n-звенная ломаная Q, у которой на каждой из данных прямых расположено по одному звену. Остается убедиться, что Q не имеет самопересечений. Пусть это не так, и звено ломаной Q, лежащее на прямой l_i, пересекает звено, лежащее на прямой l_j, где $j \geq i+2$. Но это противоречит определению l_{i+1} как первой прямой, отличной от $l_1, l_2, \ldots, l_i$, с которой мы повстречались в процессе построения ломаной Q при движении по прямой l_i.

б) Заметим, что построенная в пункте а) незамкнутая ломаная Q лежит по одну сторону от прямой l_n. Далее введем координаты, приняв l_n за ось Ox, так, что ломаная Q лежит в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Ниже вместо l_n будем писать просто l.

Итак, ломаная Q обладает следующими свойствами:

(1) Q – незамкнутая n-звенная ломаная; на каждой из данных прямых расположено ровно по одному ее звену, причем начальное звено лежит на оси Ox;

(2) Q лежит в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

Скажем, что ломаная, удовлетворяющая условиям (1), (2), *упирается в* l.

Для каждой ломаной W, упирающейся в l, через $q_1(W), \ldots, q_{n-1}(W)$ обозначим по порядку ее неконцевые вершины, начиная с $q_1(W)$, лежащей на l. Через $l(W)$ обозначим прямую, проходящую через $q_{n-1}(W)$ и содержащую последнее звено W. Через $l^-(W)$ обозначим луч, состоящий из всех точек $l(W)$, у которых абсцисса меньше, чем абсцисса точки $q_{n-1}(W)$. Через $q_n(W)$ обозначим общую точку луча $l^-(W)$ и объединения прямой l и ломаной $q_1(W)q_2(W)\ldots q_{n-1}(W)$, имеющую наибольшую ординату.

Среди всех упирающихся в l ломаных выберем ломаную с наименьшей суммой ординат вершин $q_1(W), \ldots, q_{n-1}(W)$. Если $q_n(W)$ лежит на прямой l, то $q_1(W)\ldots q_{n-1}(W)q_1(W)$ – искомая замкнутая n-звенная ломаная (рис.2,*а*).

Предположим теперь, что $q_n(W)$ – точка пересечения луча $l^-(W)$ с отрезком $q_i(W)q_{i+1}(W)$ для некоторого $1 \leq i \leq n-2$ (рис.2,*б*). Тогда можем задать новую ломаную W', упирающуюся в l, следующим образом: пусть $q_1(W') = q_1(W), \ldots, q_i(W') = q_i(W)$, $q_{i+1}(W') = q_n(W)$, $q_{i+2}(W') = q_{n-1}(W), \ldots$ $\ldots, q_{n-1}(W') = q_{i+2}(W)$, и пусть $l(W')$ – прямая $q_{i+1}(W)q_{i+2}(W)$ (рис.2,*в*). Сумма ординат вершин $q_1(W'), \ldots, q_n(W')$ меньше, чем сумма ординат вершин $q_1(W), \ldots, q_n(W)$, так как ордината вершины $q_n(W')$ меньше ординаты вершины $q_{i+1}(W)$. Получено противоречие с условием минимальности, определяющим W. Это противоречие завершает доказательство.

М2324. *Пусть вневписанная окружность треугольника ABC, лежащая напротив вершины A, касается стороны BC в точке* A_1. *Точки* B_1 *на стороне CA и* C_1 *на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника* $A_1B_1C_1$ *лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.*

Вневписанной окружностью треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, называется окружность, которая касается отрезка BC, продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C. Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C, определяются аналогично.

Обозначим окружности, описанные около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, через Ω и Γ соответственно. Обозначим середины дуг CAB, ABC, BCA окружности Ω через A_0, B_0, C_0 соответственно. По условию задачи центр Q окружности Γ лежит на Ω.

Лемма. *Выполняется равенство* $A_0B_1 = A_0C_1$ *и четырехугольник* $AA_0B_1C_1$ – *вписанный.*

Доказательство. В случае $A = A_0$ утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC. Далее считаем, что $A \neq A_0$.

Ясно, что $A_0B = A_0C$. Как известно, $BC_1 = CB_1$ (каждый из этих отрезков касательных к вневписанной окружности равен $(AB + AC - BC)/2$). Далее, $\angle C_1BA_0 = \angle ABA_0 = \angle ACA_0 = \angle B_1CA_0$. Отсюда следует равенство треугольников A_0BC_1 и A_0CB_1, следовательно, $A_0C_1 = A_0B_1$. Из равенства треугольников также вытекает равенство $\angle A_0C_1A = \angle A_0B_1A$ (это соответственные внешние углы в равных треугольниках), откуда следует, что $AA_0B_1C_1$ – вписанный (очевидно, тре-

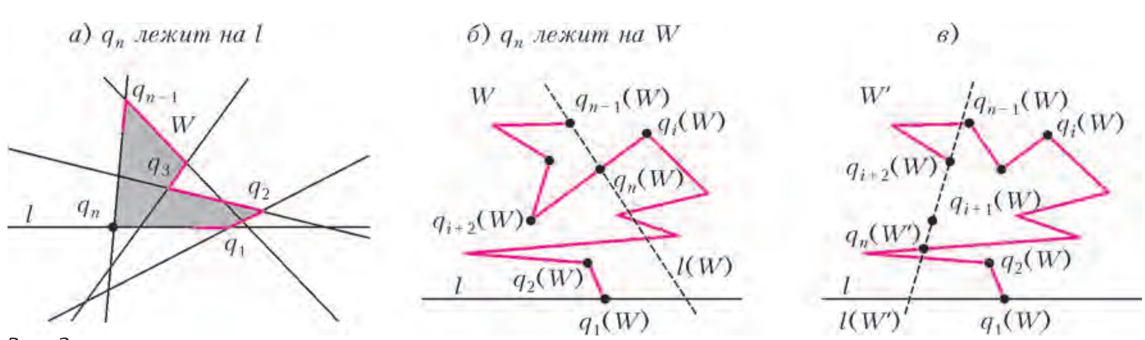


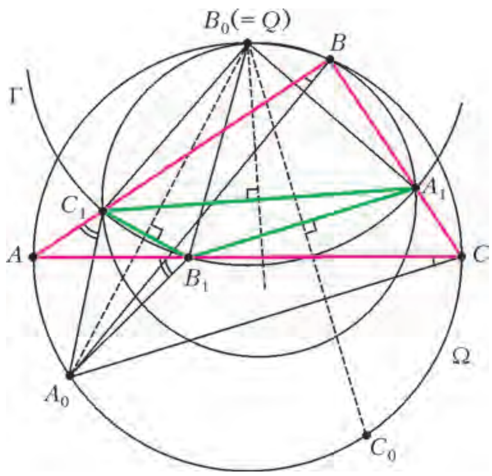
Рис. 2

угольник ABC лежит целиком по одну сторону от прямой AA_0, значит, B_1 и C_1 находятся по одну сторону от прямой AA_0).

Конечно, утверждения леммы верны, если заменить A, B, C на B, C, A соответственно.

Перейдем к решению задачи. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на полуокружности окружности Γ (диаметр которой является касательной к Ω в точке Q), поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ тупоугольный. Без ограничения общности считаем, что угол B_1 тупой. Значит, Q и B_1 лежат по разные стороны от A_1C_1; то же самое верно и для точек B и B_1. Следовательно, точки Q и B находятся по одну сторону от прямой A_1C_1.

Заметим, что серединный перпендикуляр к A_1C_1 пересекает Ω в двух точках, находящихся по разные стороны от A_1C_1. Согласно лемме, каждая из точек B_0 и Q совпадает с одной из этих двух точек, а поскольку они находятся по одну сторону от прямой A_1C_1, имеем $B_0 = Q$ (см. рисунок).



Снова используя лемму, получаем, что прямые QA_0 и QC_0 являются серединными перпендикулярами к отрезкам B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Отсюда

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1B_0B_1 + \angle B_1B_0A_1 =$$

$$= 2\angle A_0B_0B_1 + 2\angle B_1B_0C_0 = 2\angle A_0B_0C_0 = 180^\circ - \angle ABC$$

(в последнем равенстве использовано, что A_0 и C_0 – середины дуг).

С другой стороны, согласно второму утверждению леммы,

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC.$$

Из полученных равенств находим $\angle ABC = 90^\circ$, что завершает решение.

Заметим, что верно и обратное к утверждению задачи: если $\angle ABC = 90^\circ$, то середина дуги ABC будет являться центром окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

А.Полянский

M2325. *Пусть $n \geq 3$ – целое число. Рассмотрим окружность и n + 1 точек на ней, разбивающих ее на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами 0, 1, …, n так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется красивым, если для любых четырех меток a < b, c < d таких, что a + d = b + c, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c.*

Пусть M – количество красивых способов пометки. Пусть N – количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и НОД$(x, y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

Заметим, что на интервале $(0; 1)$ имеется ровно N несократимых дробей $f_1 < \ldots < f_N$, у которых знаменатель не превосходит n. Действительно, каждой паре (x, y) такой, что $x + y \leq n$ и НОД$(x, y) = 1$, поставим в соответствие дробь $x/(x+y)$. Положим $f_0 = 0$, $f_{N+1} = 1$, и пусть $\dfrac{a_i}{b_i}$ – несократимая запись дроби f_i.

Рассмотрим окружность длины 1. Через $a - b$ обозначаем хорду, соединяющую точки с метками a и b. Под дугой (a, b) будем понимать дугу, проходимую от a к b в направлении по часовой стрелке. Будем позволять себе рассматривать способы пометки произвольного набора точек окружности (формально нарушая условие о равенстве дуг); при этом считать совпадающими способы с одинаковым циклическим порядком меток.

Начнем с того, что предъявим $N + 1$ красивых способов пометки. Возьмем $\alpha \in (0; 1)$, не равное ни одной из дробей $f_1, \ldots, f_N$. Последовательно отметим точки 0, 1, 2, …, n так: произвольную точку окружности пометим 0, а каждая следующая точка пусть отстоит по часовой стрелке на расстояние α от предыдущей (так что длина дуги $(i, i+1)$ равна α). Таким образом, дуга $(0, k)$ имеет длину $\{k\alpha\}$, где $\{r\}$ означает дробную часть числа r. Назовем описанный способ пометки *циклическим* и обозначим его через $A_n(\alpha)$.

На рисунке 1 показан циклический способ $A_{13}(3/5 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ очень мало.

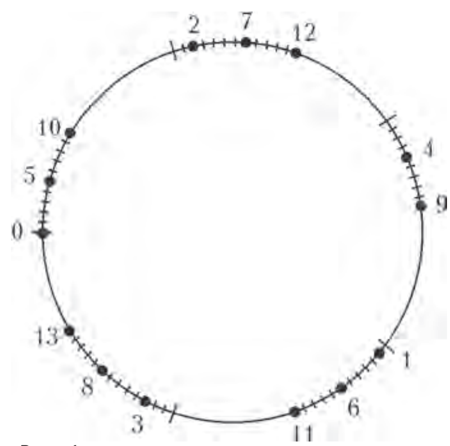


Рис. 1

Если $0 \leq a < b < c < d \leq n$ удовлетворяют равенству $a + d = b + c$, то $a\alpha - b\alpha = c\alpha - d\alpha$, значит, в способе $A_n(\alpha)$ дуги (b, a) и (d, c) равны, следовательно, хорды $a - d$ и $b - c$ параллельны. Тем самым, каждый циклический способ является красивым.

Далее покажем, что имеется ровно $N + 1$ различных циклических способов вида $A_n(\alpha)$. Чтобы это понять, посмотрим, как $A_n(\alpha)$ изменяется при увеличении α от 0 до 1. Момент совпадения точек с метками p и q происходит в точности тогда, когда мы проходим значение $\alpha = f$ такое, что $\{pf\} = \{qf\}$; это может случиться, только если f равно одной из N дробей $f_1, \ldots, f_N$. Поэтому на каждом из интервалов $f_i < \alpha < f_{i+1}$ способ $A_n(\alpha)$ не меняется, следовательно, имеется не более $N + 1$ различных циклических способов.

Покажем, что все указанные циклические способы различны. Пусть $\varepsilon > 0$ очень мало. В способе $A_n(f_i + \varepsilon)$ дуга $(0, k)$ имеет длину $\left\{\frac{ka_i}{b_i}\right\} + k\varepsilon$ (вспомним, что $f_i = \frac{a_i}{b_i}$, где НОД$(a_i, b_i) = 1$), поэтому все помеченные точки разбиваются на b_i *кластеров* (здесь кластером мы называем группу близко расположенных точек; длина дуги между соседними точками кластера равна $b_i\varepsilon$). Начальные точки кластеров имеют метки $0, 1, \ldots, b_i - 1$, метки чисел в одном кластере имеют один и тот же остаток при делении на b_i, причем эти метки идут в порядке возрастания (по часовой стрелке). Значит, в способе $A_n(f_i + \varepsilon)$ в кластере, который начинается точкой с меткой 0, точка b_i следует непосредственно за 0. Следующий (по часовой стрелке) кластер (кластер всего один при $i = 0$) начинается с метки $k < b_i$ такой, что $ka_i \equiv 1 \pmod{b}_i$, и эта метка k будет первой меткой, меньшей b_i, встречающейся при движении от 0 по часовой стрелке. Так мы можем восстановить по способу $A_n(f_i + \varepsilon)$ числа b_i и k, а по ним – a_i и f_i.

Из сказанного вытекает, что $N + 1$ циклических способов $A(\varepsilon), A(f_1 + \varepsilon), \ldots, A(f_N + \varepsilon)$ попарно различны.

Зафиксируем факт, который будет полезен далее:

если $f_i < \alpha < f_{i+1}$, то в способе $A_n(\alpha)$ точки b_{i+1}, 0, b_i идут подряд по часовой стрелке. (∗)

Действительно, ранее мы видели, что b_i сразу следует за 0 в способе $A_n(f_i + \varepsilon) = A_n(\alpha)$. Аналогично, b_{i+1} находится непосредственно перед 0 в способе $A_n(f_{i+1} - \varepsilon) = A_n(\alpha)$.

Наконец, индукцией по n мы докажем, что каждый красивый способ является циклическим. Для $n \le 2$ утверждение очевидно. Теперь предположим, что все красивые способы пометить n точек (метками 0, 1, 2,… …, $n - 1$) являются циклическими. Таким образом, способ A_{n-1}, полученный из данного способа A_n стиранием точки с меткой n, циклический, скажем $A_{n-1} = A_{n-1}(\alpha)$.

Пусть α лежит между несократимыми дробями $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, которые соседствуют в ряду дробей со знаменателями, не превосходящими $n - 1$. Существует не более одной дроби $\frac{i}{n}$ в интервале $\left(\frac{p_1}{q_1}; \frac{p_2}{q_2}\right)$, так как $\frac{i}{n} < \frac{i}{n-1} \le \frac{i+1}{n}$ для $0 < i \le n - 1$.

Случай 1. Такой дроби не существует.

В этом случае единственный циклический способ, продолжающий способ $A_{n-1}(\alpha)$, это $A_n(\alpha)$. Мы знаем, что способы A_n и $A_n(\alpha)$ могут различаться только положением точки n. Предположим, что n следует за x и предшествует y в способе $A_n(\alpha)$. Согласно (∗), соседи точки 0 – это q_1 и q_2, поэтому $x, y \ge 1$.

Рис. 2

В способе $A_n(\alpha)$ хорда $(n-1) - x$ параллельна хорде $n - (x-1)$, значит, метка $n - 1$ находится на дуге $(x-1, x)$ (рис.2). Аналогично: $n - 1$ находится на дуге $(y, y-1)$. Следовательно, точки x, y, $x - 1$, $n - 1$ и $y - 1$ идут именно в таком порядке (по часовой стрелке) в способе $A_n(\alpha)$, а значит, и в способе A_n (возможно, $y = x - 1$ или $x = y - 1$). В способе A_n точка n лежит на дуге $(x, n-1)$, так как хорда $(n-1) - x$ и хорда $(n-1) - x$ не пересекаются. Аналогично, n находится на дуге $(n-1, y)$. Тогда n должно быть на дуге (x, y), значит, $A_n = A_n(\alpha)$.

Случай 2. Имеется ровно одно i с условием $\frac{p_1}{q_1} < \frac{i}{n} < \frac{p_2}{q_2}$.

В этом случае есть два циклических способа $A_n(\alpha_1)$ и $A_n(\alpha_2)$, каждый из которых является продолжением способа $A_{n-1}(\alpha)$, где $\frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 < \frac{i}{n}$ и $\frac{i}{n} < \alpha_2 < \frac{p_2}{q_2}$. Согласно (∗), в способе $A_{n-1}(\alpha)$ метка 0 – единственная на дуге (q_2, q_1). По этой же причине n находится на дуге $(q_2, 0)$ в способе $A_n(\alpha_1)$ и на дуге $(0, q_1)$ в способе $A_n(\alpha_2)$.

Полагая $x = q_2$ и $y = q_1$ и повторяя рассуждение из случая 1, получаем, что n должно быть на дуге (x, y) в способе A_n. Следовательно, способ A_n должен совпадать с $A_n(\alpha_1)$ или $A_n(\alpha_2)$.

Доказательство того, что каждый красивый способ является циклическим, завершено. Тем самым, задача полностью решена.

И.Богданов

Ф2323. *В точке А – середине дна стакана с вертикальными стенками – находится тяжелый шарик (рис.1). С какой по величине и направлению скоростью надо выстрелить шарик так, чтобы, ударившись n раз о стенки, он вернулся в исходное положение? Какое время понадобится на такое движение? Ширину стакана считать равной 2l, столкновения шарика со стенками – абсолютно упругими.*

Рис. 1

Сделаем «развертку» стакана, как это показано на рисунке 2. Присваивая исходному стакану номер 0, дадим полученным в результате развертки стаканам номера ± 1, ± 2 и т.д. Пусть A_n – середина донышка n-го стакана. Чтобы после n упругих ударов об стенки шарик вернулся

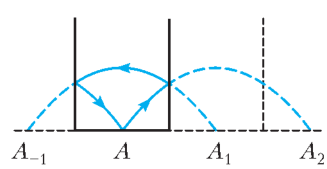


Рис. 2

в исходную точку A, в начальный момент им надо выстрелить так, чтобы в случае отсутствия стенок он попал в точку A_n. Последующая «свертка» стаканов вместе с найденной параболической траекторией даст исходное решение (см. рис.2 для случая $n = 2$).

Для аналитического исследования задачи введем неподвижную систему отсчета с горизонтальной осью x и направленной вертикально вверх осью y. Тогда если v – начальная скорость, а α – отсчитываемый от горизонтального направления начальный угол, то

$$\Delta x = v\cos\alpha\cdot t\,,\ \ \Delta y = v\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Приравнивая нулю второе соотношение, находим, что время движения составит

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}\,.$$

Подставляя это значение в первое соотношение, получим равенство

$$2ln = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}\,,$$

задающее связь между данными задачи и начальными условиями, определяющими требуемое движение. Отсюда имеем

$$\sin 2\alpha = \frac{2lgn}{v^2} \le 1\,.$$

Это неравенство определяет ограничение снизу на величину начальной скорости. В случае, когда нестрогое неравенство обращается в равенство,

$$\sin 2\alpha = 1\,,\ \ \alpha = \frac{\pi}{4}\,,\ \ v = \sqrt{2lgn}\,,$$

и задача имеет единственное решение. Если же имеет место строгое неравенство, то решений два:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2lgn}{v^2}\ \text{ и }\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2lgn}{v^2}\,.$$

Им отвечают, соответственно, настильная и навесная траектории.

А что если начальная точка располагается где угодно на дне стакана или если после столкновений со стенками шарик попадает в любую другую точку донышка? Подумайте над этими вопросами самостоятельно.

А.Буров

Ф2324*. *Тонкостенная труба с жесткими стенками, поперечным круглым сечением $S = 10$ см^2 и длиной $L = 1$ м закрыта плоской тонкой заслонкой снизу и открыта сверху. Эту трубу, удерживая слегка отклоненной от вертикального положения, опустили в воду озера так, что ее верхний конец оказался чуть выше уровня воды в озере. После этого отверстие очень быстро открыли. Заслонка двигалась поступательно в направлении, перпендикулярном оси трубы. На какую максимальную высоту над уровнем воды в озере выплеснется вода из трубы? Рассмотрите два случая: а) сечение трубы при приближении к нижнему концу плавно возрастает от величины S за счет раструба на отрезке, сравнимом по длине с диаметром внутреннего сечения; б) сечение постоянно и равно S вплоть до самого нижнего конца трубы. Во втором случае эффективное сечение потока на входе воды в трубу меньше полного геометрического сечения: $S_{\text{эфф}}/S = k_{\text{эфф}} = 0{,}5$.*

Сечение трубы достаточно велико, чтобы можно было не учитывать потерь энергии на трение между водой и стенками трубы. Если вблизи нижнего конца сечение трубы плавно изменяется, то в этом случае (а) нет потерь энергии на перемешивание воды, уже находящейся в трубе, с водой, которая только что поступила в трубу, как это имеет место во втором случае (б). Пренебрежем сначала кинетической энергией воды вне трубы около ее нижнего открытого конца и будем полагать, что к моменту, когда вся труба окажется заполненной водой, потенциальная энергия воды в озере уменьшится, так как сначала труба не была заполнена, а теперь в ней находится вода. Иными словами, можно считать, что тонкий слой воды с поверхности озера переместился в трубу. Это уменьшение потенциальной энергии сопровождается ростом кинетической энергии воды, которая движется в объеме трубы. Таким образом, получаем уравнение

$$\rho gSL\frac{L}{2} = \frac{\rho SLu^2}{2}\,.$$

Отсюда находим значение скорости:

$$u = \sqrt{gL}\,.$$

Первая порция воды, вырвавшаяся из трубы, будет иметь скорость u, поэтому она взлетит (выплеснется) на высоту

$$h_{\max} = \frac{u^2}{2g} = \frac{L}{2}\,.$$

Теперь оценим кинетическую энергию, которую к моменту заполнения трубы имеет вода снаружи трубы. Будем считать, что эта вода движется со всех направлений к отверстию и что площадь поверхности сферы, к которой она сходится, равна площади поперечного сечения трубы. Радиус такой сферы равен $R = \sqrt{S/\pi}/2$. Уравнение непрерывности для порции воды, находящейся на расстоянии $x > R$ от центра сферы, дает зависимость скорости этих порций воды от x:

$$4\pi x^2\cdot u_x = Su\,.$$

Полная кинетическая энергия всей воды, движущейся снаружи трубы в момент ее заполнения, равна примерно

$$\int_R^\infty \frac{\rho dx\cdot 4\pi x^2}{2}\left(\frac{Su}{4\pi x^2}\right)^2 = \int_R^\infty \frac{\rho dx\,(Su)^2}{8\pi x^2} =$$

$$= \frac{\rho\,(Su)^2}{8\pi R} = \frac{L\rho u^2 S}{2}\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\,.$$

Видно, что эта энергия составляет только небольшую долю, а именно $\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 8{,}9\cdot 10^{-3}$, от кинетической энергии воды внутри трубы. Это означает, что сделанное пренебрежение оправдано.

Рассмотрим теперь второй случай, когда сечение трубы всюду одинаковое, поэтому вода, втекающая в трубу, не по всему нижнему сечению трубы имеет одинаковую скорость. Вблизи ее нижнего конца у стенок внутри трубы скорость воды равна нулю, а в центре сечения скорость течения самая большая, и это связано не с вязкостью воды, а с тем, что переход от большого сечения потока воды в озере к малому сечению в трубе не плавный! (Подробное рассмотрение этого вопроса есть, например, в книге Е.И.Бутикова, А.А.Быкова и А.С.Кондратьева «Физика для поступающих в вузы» (М.: Наука, 1978, с.114–115). В этом случае эффективное сечение трубы на входе вдвое меньше ее геометрического полного сечения:

$$\frac{S_{\text{эфф}}}{S} = \frac{1}{2} = k_{\text{эфф}}.$$

Значит, струя воды входит в трубу со скоростью u, а вдали от входа в это же время вода в трубе движется со скоростью $u \cdot k_{\text{эфф}}$. В результате теряется значительная доля кинетической энергии воды, входящей в трубу. Если к некоторому моменту времени труба оказалась заполненной на длину x и вода в трубе движется с ускорением a, то давление вблизи нижнего конца трубы внутри трубы и обеспечивает это ускорение. Из второго закона Ньютона следует, что

$$pS - \rho Sxg = \rho Sxa.$$

Значит, давление равно

$$p = \rho x(g + a).$$

Из уравнения Бернулли для движения воды через нижнее отверстие получаем

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho gL - p.$$

Вдобавок нам известна кинематическая связь

$$\frac{dx}{dt} = v \cdot k_{\text{эфф}}.$$

Объединяя все соотношения, получим уравнение для координаты x уровня воды в трубе:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k_{\text{эфф}}^2\left(gL - x(g + a)\right).$$

Численное решение этого уравнения на компьютере показывает, что ускорение a, с которым движется уровень воды в трубе, при любых разумных начальных значениях x, a и dx/dt быстро «выходит» на стационарное значение, зависящее от величины $k_{\text{эфф}}$. Можно сразу предположить, что $a = \text{const}$, и найти эту постоянную величину. При $0 < x \ll L$, т.е. при $x \approx 0$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = k_{\text{эфф}}\sqrt{2gL}.$$

Имеется в виду, что труба уже начала заполняться водой и механизм торможения, для описания которого и вводится величина $k_{\text{эфф}}$, уже работает. При $x = L$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_L = k_{\text{эфф}}\sqrt{2aL}.$$

Считая ускорение постоянной величиной, воспользуемся известным соотношением $2aL = (dx/dt)^2_{\text{кон}} - (dx/dt)^2_{\text{нач}}$. Из этого соотношения следует

$$a = -g\frac{k_{\text{эфф}}^2}{1 + k_{\text{эфф}}^2}.$$

Отсюда можно найти и максимальную высоту, на которую выплеснется вода из верхнего отверстия трубы:

$$h_{\max} = L\frac{k_{\text{эфф}}^4}{1 + k_{\text{эфф}}^2}.$$

В первом случае (а) $k_{\text{эфф}} = 1$, поэтому $h_{\max} = L/2$, во втором случае (б) $k_{\text{эфф}} = 0{,}5$ и, значит, $h_{\max} = L/20$. Заметим, что если в эксперименте получается какое-то промежуточное значение $h_{\max}$, то по отношению $h_{\max}/L$ можно найти соответствующее ему значение коэффициента $k_{\text{эфф}}$.

В.Озеров

Ф2325. *Три одинаковые массы (например, равные единице) закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной a. В скольких положениях равновесия может находиться пробная точка массой m под действием ньютоновского притяжения со стороны масс, сосредоточенных в вершинах треугольника?*

Из соображений симметрии ясно, что по крайней мере одно положение равновесие, при котором пробная точка P расположена в центре треугольника, существует (красная точка на рисунке 1). Также ясно, что вне треугольника равновесий нет. Указанное равновесие принадлежит всем трем осям симметрии треугольника. Попробуем поискать на этих осях другие равновесия, опираясь на то обстоятельство, что в каждой точке таких осей результирующая сил притяжения направлена вдоль них самих.

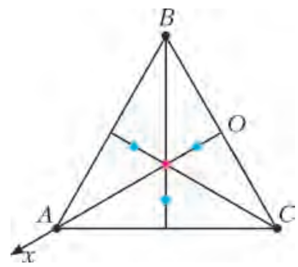


Рис. 1

Рассмотрим, например, ось симметрии, проходящую через вершину A и точку O – середину стороны BC. Введем координатную ось x с началом в точке O, направленную в сторону вершины A. Тогда координата вершины A составит $a\sqrt{3}/2$. Если точка P располагается на оси x внутри треугольника ABC, то она будет притягиваться вершиной A силой, направленной вдоль оси x и равной

$$F_A = \frac{m}{\left(a\sqrt{3}/2 - x\right)^2}.$$

Здесь и далее гравитационную постоянную будем считать равной единице. Суммарная сила притяжения со стороны вершин B и C также направлена по оси x, и ее величина составляет

$$F_{BC} = -2\frac{mx}{\left(x^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}}.$$

Таким образом, условие равновесия принимает вид

$$F = F_A + F_{BC} = m\left(\frac{1}{\left(a\sqrt{3}/2 - x\right)^2} - \frac{2x}{\left(x^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}}\right) = 0.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что отвечающее центру треугольника значение $x_1 = a\sqrt{3}/6$ удовлетворяет этому уравнению.

Посмотрим, нет ли у этого уравнения других решений. Для этого заметим, что при $x = 0$ справедливо неравенство $F(0) > 0$, выражающее то обстоятельство, что если точка P располагается в точке O, то результирующая сила направлена в сторону вершины A. Далее, например, при $x_2 = a\sqrt{3}/8$

$$F(x_2) = \frac{64m}{513a^2}\left(19 - 54\sqrt{\frac{3}{19}}\right) \approx -0{,}306579237\frac{m}{a^2} < 0 .$$

Функция $F(x)$ непрерывна и принимает на отрезке $[0; x_2]$ значения противоположных знаков. Таким образом, на этом отрезке у нее имеется еще по крайней мере один корень. Вычисления показывают, что этот корень один и он приблизительно равен $x_3 \approx 0{,}1242929158a$.

Итак, в целом по треугольнику имеются по крайней мере четыре положения равновесия (см. красную и синие точки на рисунке 1).

Замечания

1. Вместо вычисления значения функции в конкретной точке x_2 достаточно было один раз продифференцировать функцию $F(x)$ и убедиться в ее строгом монотонном возрастании в окрестности точки x_1 (рис.2.).

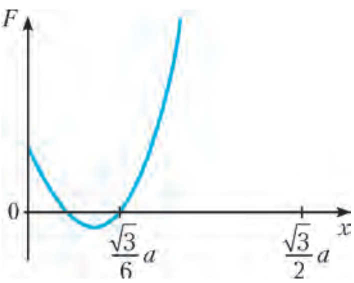


Рис. 2

2. Оси симметрии разделяют треугольник ABC на шесть маленьких базисных треугольников. Доказательство отсутствия равновесий внутри этих треугольников автору остается неизвестным.

3. Было бы интересно исследовать вопрос о числе равновесий для произвольного правильного многоугольника с равными массами в вершинах.

В.Никонов

Ф2326. *Небо над Африкой закрыто облаками. Большая лужа глубиной 0,5 м заполнена мутной темной водой (в воде присутствует взвесь черной глины – слоны постарались) с температурой +25 °С, равной температуре воздуха над лужей. Если погрузить в воду влагозащищенный люксметр, обратив его чувствительный элемент вверх, то он показывает, что на глубине 10 см свет в 2,72 раза слабее, чем возле самой поверхности, на глубине 20 см – слабее еще в 2,72 раза и т.д. В некоторый момент Солнце перешло в зенит и облака раскрылись. Поток излучения Солнца, достигший поверхности лужи, равен* $E = 1000$ *Вт/м*^{2}. *Какой через 1 минуту после начала освещения будет температура воды в этой луже на глубине 5 см и какой она будет на глубине 40 см?*

Частички черной глины только поглощают свет, но не рассеивают его, поэтому вода темная. Поскольку мощность выделяющегося тепла, приходящаяся на единицу объема жидкости, вверху больше, чем внизу, конвекция в луже со спокойной водой (слоны ушли) не возникнет. Коэффициент теплопроводности воды, равный $0{,}6$ Вт/(м·К), весьма мал, поэтому теплопередачей от прогревшихся участков к прохладным слоям воды за небольшой промежуток времени можно пренебречь. По условию задачи интенсивность тепловыделения убывает с глубиной h (см) по экспоненциальному закону:

$$E = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{h}{10}\right), \text{ где } E_0 = 1000 \text{ Вт/м}^2 .$$

На каждый объем воды толщиной 1 мм и площадью 1 м^2 ($V = 1\text{ мм}\cdot 1\text{ м}^2 = 10^{-3}\text{ м}^3$, $m = 1$ кг), имеющий теплоемкость $C = 4200$ Дж/К, на глубине h (см) выделяется тепловая мощность

$$W = 1000\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\cdot\exp\left(-\frac{h}{10}\right)\cdot 1\text{ м}^2 = 1000\text{ Вт}\cdot\exp\left(-\frac{h}{10}\right).$$

Это означает, что на глубине h температура воды поднимается со скоростью

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1000}{4200}\cdot\exp\left(-\frac{h}{10}\right)\text{К/с}.$$

За 60 секунд температура воды на глубине 5 см поднимется до $25\text{ °C} + 8{,}66\text{ °C} = 33{,}66\text{ °C}$. А на глубине 40 см повышение температуры за такое же время будет существенно меньше, и температура поднимется до $25\text{ °C} + 0{,}26\text{ °C} = 25{,}26\text{ °C}$.

А.Светлов

Ф2327. *Три маленьких шарика расположены вдоль оси координат x в космосе. Вокруг больше ничего нет, гравитационными силами взаимодействия можно пренебречь по сравнению с электрическими. Скорости всех шариков в начальный момент равны нулю; координаты шариков x, 2x, 4x; заряды шариков q, 4q, 9q; массы шариков m, 3m, 2m соответственно. Какими будут скорости шариков через очень большое время?*

У нас неизвестных три, а уравнений, которые можно составить, используя законы сохранения импульса и энергии, всего два. Поэтому давайте внимательно разберемся с соотношениями числовых данных в условии. Начальные расстояния r_{12} и r_{23} от среднего шарика до двух крайних относятся как 1 к 2. А если найти ускорения шариков в начальный момент, то их разности $a_1 - a_2$ и $a_3 - a_2$ тоже относятся как $1:2$. Это означает, что и в любой другой момент времени отношение расстояний между шариками будет таким же! Следовательно, скорости шариков будут иметь такое же соотношение, как и их ускорения, т.е.

$$v_1 : v_2 : v_3 = (-3):(-1):(+3).$$

Это дополнительное кинематическое соотношение вместе с двумя уравнениями, полученными на основе законов сохранения, позволяет найти простое (школьное) решение этой задачи.

Обозначим v минимальную по величине скорость (скорость среднего шарика), тогда через большое время скорости шариков, с учетом закона сохранения импульса, будут равны $-3v$, $-v$, $+3v$. Потенциальная энергия взаимодействия шариков через большое время уменьшится до нуля и, в соответствии с законом сохранения энергии, перейдет в кинетическую энергию движения шариков:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m(3v)^2}{2} + \frac{3m(v)^2}{2} + \frac{2m(3v)^2}{2} =$$

$$= 15mv^2 = E_{\text{пот}} = k\frac{q\cdot 4q}{x} + k\frac{4q\cdot 9q}{2x} + k\frac{q\cdot 9q}{3x} = 25\frac{kq^2}{x}$$

(здесь k – это электрическая постоянная). Отсюда находим искомые величины скоростей:

$$v = \sqrt{\frac{5kq^2}{3mx}},\ v_1 = 3v,\ v_2 = v,\ v_3 = 3v.$$

А.Зильберман

Ф2328. *Идеальная батарейка, амперметр и вольтметр соединены последовательно в замкнутую цепь. Показания приборов равны 1А и 10 В соответственно. Если параллельно амперметру подключить резистор с неким неизвестным сопротивлением, то показание амперметра станет 0,9 А, а показание вольтметра будет 10,2 В. Какова ЭДС батарейки? Каковы внутренние сопротивления приборов? Каково это «неизвестное сопротивление»?*

Электродвижущая сила батарейки $\mathscr{E}$ равна сумме падений напряжения на приборах. В первом случае

$$\mathscr{E} = I_1\cdot R_{\text{A}} + U_1 = 1\,\text{А}\cdot R_{\text{A}} + 10\,\text{В},$$

где R_{A} – это внутреннее сопротивление амперметра. Во втором случае

$$\mathscr{E} = I_2\cdot R_{\text{A}} + U_2 = 0{,}9\,\text{А}\cdot R_{\text{A}} + 10{,}2\,\text{В}.$$

Из полученных двух уравнений находим

$$\mathscr{E} = \frac{I_2U_1 - I_1U_2}{I_1 - I_2} = 12\ \text{В},$$

$$R_{\text{A}} = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 2\ \text{Ом}.$$

Для определения внутреннего сопротивления вольтметра нужно разделить падение напряжения на нем на ток, текущий через вольтметр. Ток и напряжение вольтметра известны для цепи без неизвестного резистора. Получаем

$$R_{\text{V}} = \frac{U_1}{I_1} = 10\ \text{Ом}.$$

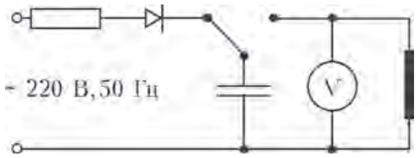
Теперь находим «неизвестное сопротивление»:

$$R = \frac{\mathscr{E} - U_2}{\dfrac{U_2}{R_{\text{V}}} - I_2} = 15\ \text{Ом}.$$

Конечно, может смущать весьма малое внутреннее сопротивление вольтметра. Но каких только чудес на свете не бывает!

А.Зильберман

Ф2329. *Выпрямитель сетевого напряжения (220 В, 50 Гц) представляет собой последовательно соединенные резистор сопротивлением 0,5 кОм и полупроводниковый диод, выдерживающий прямой ток 1 А и обратное напряжение 400 В. Конденсатор емкостью 0,001 Ф сначала подключили к выпрямителю и дождались максимальной зарядки (см. рисунок). Затем контакт ключа перекинули, и обкладки конденсатора оказались подключенными к медной проволочке длиной $L = 4{,}7$ см с поперечным сечением $S = 10^{-2}$ мм^2. Проволочка находится в воздухе при комнатной температуре $t_0 = 20\ {}^\circ\text{C}$. Что будет показывать идеальный вольтметр через 10 с после подключения проволочки? Необходимые для решения задачи дополнительные данные найдите самостоятельно. При реальном проведении такого эксперимента для безопасности рекомендуется проволочку поместить между листами бумаги. Считайте, что молярная теплоемкость меди (и твердой, и жидкой) не меняется с температурой и равна $3R = 25$ Дж/(моль·К).*



Напряжение, до которого был заряжен конденсатор до перебрасывания ключа, равно $\sqrt{2}U$, где $U = 220$ В – напряжение сети. В конденсаторе до подключения проволочки была накоплена энергия

$$W = \frac{C\left(\sqrt{2}U\right)^2}{2} = 48{,}4\ \text{Дж}.$$

Легко догадаться, что проволочка успеет нагреться, расплавиться и даже испариться, а конденсатор так до конца и не разрядится. Необходимые дополнительные данные можно найти в любом физическом справочнике. Молярная масса меди $\text{M} = 64$ г/моль, плотность меди $\rho = 8{,}96\ \text{г/см}^3 \approx 9\ \text{г/см}^3$. Масса проволочки равна $m = \rho SL$. Это соответствует количеству вещества $\nu = \rho SL/\text{M}$. Температура плавления меди $t_1 = 1083\ {}^\circ\text{C}$, молярная теплота плавления $q = 13$ кДж/моль. Температура кипения меди при атмосферном давлении $t_2 = 2080\ {}^\circ\text{C}$, молярная теплота испарения меди $r = 302$ кДж/моль. Конечно, часть энергии конденсатора будет израсходована на излучение и нагрев воздуха, но этими «потерями» (интуиция подсказывает) можно пренебречь. Всего на нагрев, плавление и испарение меди потребуется энергия

$$Q = \left(C(t_1 - t_0) + q + C(t_2 - t_1) + r\right)\frac{\rho SL}{\text{M}} \approx 24{,}3\ \text{Дж}.$$

Остаток энергии в конденсаторе будет равен

$$W - Q = \frac{CU_C^2}{2}.$$

Поэтому вольтметр через 10 с после подключения проволочки покажет напряжение

$$U_C = \sqrt{\frac{2(W-Q)}{C}} \approx 220\ \text{В}.$$

А.Тарчевский

Ф2330*. *Длинный ($L = 10$ м) соленоид представляет собой намотанную в один слой на цилиндрический каркас диаметром $D = 0{,}1$ м проволоку прямоугольно-*

го сечения с размером сечения $a \times a$ (a = 0,1 мм). Поверхность проволоки покрыта тонким слоем непроводящего ток лака. Выполняются такие соотношения: $L \gg D \gg a$. Витки проволоки расположены вплотную друг к другу. Концы проволоки выведены перпендикулярно оси симметрии соленоида и далеко-далеко от соленоида подключены к батарейке. По проволоке течет ток I. Вблизи центра соленоида на его внешней поверхности сидит маленький жук. У жука есть совсем маленький компас, и он ползет все время в направлении вектора индукции магнитного поля. Какова форма траектории движения жука по соленоиду? Считая, что длина пути жука от точки старта составила $s = 1$ м, найдите величину перемещения жука.

У магнитного поля вне объема соленоида, точнее на его внешней поверхности вблизи середины, имеется составляющая вдоль оси соленоида, направленная от северного полюса магнита к его южному полюсу, и составляющая магнитного поля, поперечная к оси соленоида, направленная вдоль его внешней поверхности.

Поперечную составляющую можно найти, воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Получим

$$B_\perp = \frac{\mu_0 I}{\pi(D+2a)} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi D},$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Чтобы найти продольную составляющую индукции магнитного поля, нужно вычислить поток вектора индукции, который проходит внутри соленоида от его южного полюса к северному. Число витков на единицу длины соленоида равно $n = 1/a$. При протекании тока I по проволоке (по виткам соленоида) внутри соленоида вблизи его середины создается магнитное поле с индукцией $B = nI\mu_0$. Магнитный поток, проходящий через поперечное сечение соленоида, в его середине равен

$$\Phi = B\frac{\pi D^2}{4}.$$

Этот магнитный поток *внутри соленоида* «идет» от южного полюса к северному полюсу магнита/соленоида. Для оценки величины продольной составляющей магнитного поля *вне соленоида* мы используем упрощенную модель двух точечных (маленьких в сравнении с длиной соленоида) магнитных зарядов с разными свойствами – северным и южным. От северного полюса магнита поток «разбегается» во все стороны, т.е. в телесный угол 4π. А к южному магнитному полюсу такой же поток «сбегается» со всех сторон, т.е. из телесного угла тоже 4π. Индукция магнитного поля вне соленоида вблизи его центра создается «разбежавшимся» потоком вектора индукции от северного полюса и «сбегающимся», или «собирающимся», потоком вектора индукции к южному магнитному полюсу. Отсюда находим продольную составляющую индукции магнитного поля вне объема соленоида, но вблизи его поверхности и около его середины:

$$B_\parallel = 2\frac{\Phi}{4\pi\left((L/2)^2 + (D/2+a)^2\right)} \approx$$

$$\approx 2\frac{\mu_0 I n\pi (D/2)^2}{4\pi (L/2)^2} = \frac{\mu_0 I D^2}{2aL^2}.$$

Суммарное поле вблизи середины соленоида на его внешней поверхности направлено по касательной к его поверхности, т.е. жук ползет по поверхности соленоида, а форма его траектории – это часть спирали диаметром

$$D + 2a \approx D$$

и шагом спирали

$$H = \pi D\frac{B_\parallel}{B_\perp} = \pi D\frac{\mu_0 I D^2/(2aL^2)}{\mu_0 I/(\pi D)} = \frac{\pi^2 D^4}{2aL^2}.$$

Для значений параметров, приведенных в условии задачи, $H \approx 4{,}9$ см. При длине пути жука $s = 1$ м он сместился вдоль оси соленоида на расстояние

$$d_1 = \frac{sH}{\sqrt{H^2 + \pi^2 D^2}} \approx 15{,}5 \text{ см}$$

и при этом совершил поворот вокруг оси соленоида на угол

$$\alpha = \frac{2\pi s}{\sqrt{H^2 + \pi^2 D^2}} \approx 19{,}76 \text{ рад},$$

т.е. на три целых оборота и плюс еще на угол $\varphi \approx 0{,}9$ рад. Проекция вектора перемещения жука на плоскость сечения соленоида, перпендикулярного его оси, составила

$$d_2 = 2\frac{D}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \approx 4{,}4 \text{ см}.$$

В итоге величина перемещения жука от точки старта будет равна

$$l = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \approx 16 \text{ см} \ll 10 \text{ м}.$$

Если длина пути s будет существенно больше, то, естественно, силовая линия индукции магнитного поля «уйдет» под поверхность цилиндра внутрь соленоида. Но числовые данные в условии задачи таковы, что этого не происходит.

С.Жуков

Ф2331. *Граница раздела областей пространства, в одной из которых есть однородное магнитное поле с индукцией B = 10 Тл, а в другой магнитного поля нет, представляет собой плоскость. Естественно, что вектор $\vec{B}$ параллелен этой границе раздела. Из области, где поля нет, в область с магнитным полем влетает электрон с зарядом e. Его скорость в момент пересечения границы перпендикулярна вектору $\vec{B}$, составляет угол α с плоскостью границы раздела и величина скорости много меньше скорости света. Движущийся в магнитном поле с ускорением a электрон излучает, и мощность электромагнитных волн – так называемого синхротронного излучения – пропорциональна квадрату произведения величины заряда на величину ускорения, деленного на скорость света:*

$W = \delta (ea/c)^2$. *Коэффициент пропорциональности обозначен символом* δ, *он имеет размерность электрического сопротивления и равен* δ = 20 *Ом. При каком значении угла* α *электрон не покинет область с магнитным полем?*

Для справки: в Международной системе единиц (СИ) мощность излучения заряда q, движущегося с ускорением a, равна $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2q^2}{3c^3}$.

Будем считать, что потери на излучение невелики. Если совсем не учитывать потери энергии электрона за счет излучения (первое приближение), то он обязательно покинет область с магнитным полем. Ускорение нерелятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле со скоростью, перпендикулярной этому магнитному полю, без учета излучения равно

$$a = \frac{ev_0B}{m},$$

где m – масса электрона, v_0 – его скорость. Период обращения электрона по окружности радиусом $R_0 = v_0m/(eB)$ равен

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Учтем теперь наличие излучения (второе приближение). Мощность потерь на синхротронное излучение равна

$$W = \delta\left(\frac{ea}{c}\right)^2 = \frac{\delta e^4v^2B^2}{m^2c^2}.$$

Она пропорциональна кинетической энергии электрона. За один период электрон теряет примерно $\frac{\delta e^4v^2B^2}{m^2c^2}\cdot\frac{2\pi m}{eB}$ своей кинетической энергии, и это составляет небольшую долю от его первоначальной энергии: примерно $1{,}4\cdot10^{-10}$. Скорость электрона и пропорциональный ей радиус окружности траектории за один оборот уменьшились до величин

$$v_1 = v_0\left(1-\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2}\right) \text{ и } R_1 = R_0\left(1-\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2}\right).$$

Если электрон влетел в область с магнитным полем под небольшим углом α к поверхности раздела и должен был бы при отсутствии потерь на излучение примерно через период вылететь из области с магнитным полем, то при уменьшении радиуса кривизны траектории за счет излучения и при сохранении положения центра кривизны траектория может вся целиком оказаться в области с магнитным полем. Для этого должно выполняться неравенство

$$\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2} > 1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha}{2}, \text{ или}$$

$$\alpha < \sqrt{\frac{4\pi\delta e^3B}{mc^2}} \approx 1{,}2\cdot10^{-5} \text{ рад}.$$

Ускорение электрона, движущегося в магнитном поле, имеет не только составляющую, перпендикулярную скорости, но и направленную навстречу скорости продольную составляющую, возникающую вследствие наличия излучения. Будем считать, что эта продольная составляющая ускорения значительно меньше поперечной составляющей, тогда получается, что и кинетическая энергия электрона, и величина его скорости убывают по экспоненциальному закону. Это означает, что движение электрона будет описываться так же, как и колебания маятника в среде с вязким трением, т.е. координаты частицы будут описываться уравнением затухающих колебаний. Можно составить соответствующие уравнении, решить их и прийти к такому же соотношению для угла α, которое уже получено.

Д.Сергеев

Ф2332. *Центр квадрата со стороной 1 см находится на главной оптической оси тонкой линзы. Действительное изображение квадрата, которое создает линза, – это трапеция, параллельные стороны которой перпендикулярны главной оптической оси линзы, пересекают ее и имеют длины 2 см и 3 см. Каково расстояние между этими сторонами трапеции?*

Поскольку стороны трапеции перпендикулярны оптической оси и пересекают ее, то и соответствующие стороны квадрата тоже перпендикулярны оптической оси и тоже пересекают ее. Поперечные увеличения двух сторон квадрата, перпендикулярных главной оптической оси линзы, равны $\Gamma_{1\perp} = 2$ и $\Gamma_{2\perp} = 3$.

Утверждается, что продольное увеличение отрезка, лежащего на оптической оси, на концах которого находятся те самые две стороны квадрата, перпендикулярные оптической оси линзы, равно произведению поперечных увеличений объектов, расположенных вблизи концов этого отрезка, т.е. $\Gamma_{=} = \Gamma_{1\perp}\cdot\Gamma_{2\perp} = 2\cdot3 = 6$. Расстояние между сторонами квадрата, перпендикулярными оптической оси, равно 1 см. Следовательно, расстояние между параллельными сторонами трапеции равно 6 см.

Докажем используемое утверждение. Пусть A и B – расстояния от линзы до источника света, находящегося на оптической оси линзы, и до его изображения соответственно. Обозначим буквами a и b расстояния от линзы до второго источника света и до его изображения, которые тоже находятся на оптической оси линзы. Поперечные увеличения изображений объектов малых размеров, располагающихся вблизи точек A и a, равны B/a и b/a соответственно. Продольное увеличение отрезка Aa равно $(B-b)/(a-A)$. Используем формулу для тонкой линзы:

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{a} = \frac{1}{b}-\frac{1}{B},$$

или

$$\frac{a-A}{aA} = \frac{B-b}{Bb}.$$

Следовательно,

$$\frac{B-b}{a-A} = \frac{Bb}{aA} = \frac{B}{A}\frac{b}{a}.$$

Что и требовалось доказать.

Е.Кузнецов

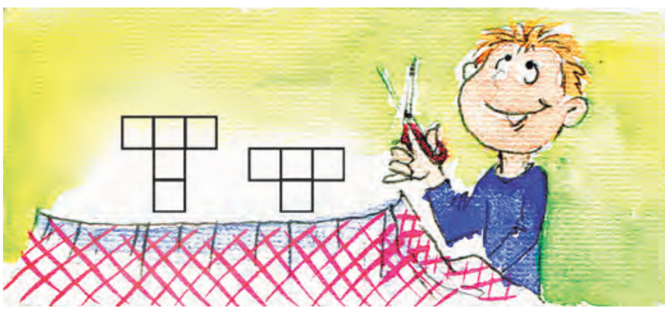
Задачи

1. Дети ходили в лес по грибы. Если Аня отдаст половину своих грибов Вите, у всех детей станет поровну грибов, а если вместо этого Аня отдаст все свои грибы Саше, то у Саши станет столько же грибов, сколько у всех остальных вместе взятых. Сколько детей ходило за грибами?

И.Раскина

2. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные слева, а можно – на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)

А.Шаповалов



3. Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон 0

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ – ОТКРОЙ = ОТВЕТ – ТВОЙ

СЕКРЕТ – ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился. «Элементарно, Лестрейд! – пояснил сыщик. – Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозна-

чают одинаковые цифры, разные – разные, а черточка – это минус! Мориарти едет в поезде № ...»

Напишите номер поезда и номер вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс.

И. Раскина

4. Одуванчик утром распускается, два дня цветет желтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня 15 желтых и 11 белых.

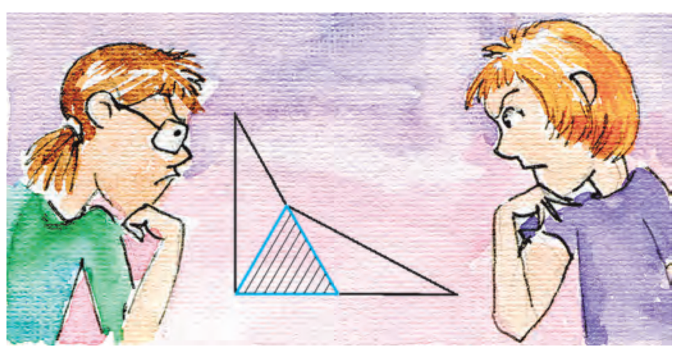
а) Сколько желтых одуванчиков было на поляне позавчера?

б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра?

Д.Шноль

5. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний.

Е.Бакаев



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXV Математическом празднике.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Новые приключения Буратино

Геометрическая сказка

С.ДВОРЯНИНОВ

Когда Буратино был совсем маленьким, на прогулки его водил папа Карло. Но вот Буратино подрос и стал ходить в начальную школу. А у старого Карло как раз появилось много заказов на изготовление деревянной мебели, работы прибавилось, а свободное время, соответственно, убавилось. Вот тогда стал Буратино просить отпустить его погулять одного.

– Папа Карло, наш городок со всех четырех сторон окружают такие прекрасные леса, рощи и парки, похожие на леса! Там так чудесно! Позволь мне туда отправиться! А чтобы не заблудиться, я возьму с собой компас!

– Что ж, – отвечал его отец, – ты у меня не маленький, но я тебе дам не компас, а GPS-навигатор. Вот завтра, для начала, побывай в Квадратном лесу, а навигатор я настрою так, чтобы он тебе показывал направление, перпендикулярное сторонам этого леса.

И вот Буратино после школы отправился в Квадратный лес.

– Ну, как прогулка? – спросил его папа Карло. Понравилась?

– Да, конечно, только я один и тот же путь от края до края прошел дважды, туда и обратно (рис.1,*а*). Вышел из стартовой точки S и в нее же возвратился. Можно выбрать более интересный маршрут?

– Можно. Отправляйся завтра в Четырехугольный лес. А навигатор будет показывать тебе направления вдоль диагоналей этого четырехугольника.

Вышел Буратино из городских ворот, тут же оказался на опушке леса и включил навигатор. Дошел до одной стороны четырехугольника, потом до другой и так далее, все время двигаясь параллельно диагоналям четырехугольника (рис.1,*б*). И что удивительно, он оказался вновь в начале своего пути – в стартовой точке S!

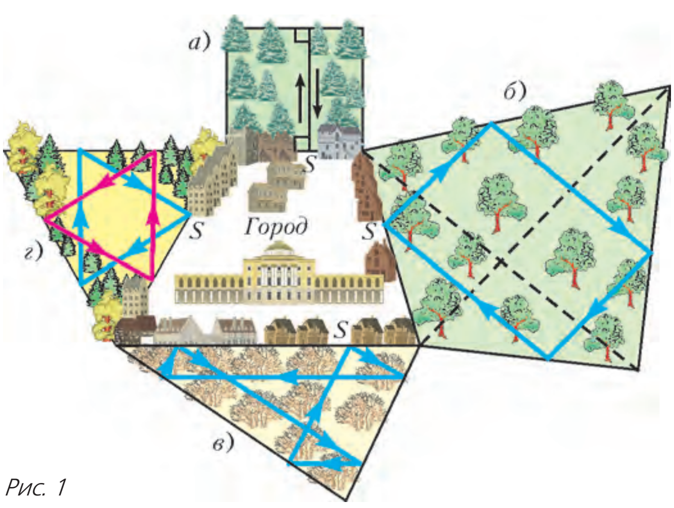


Рис. 1

– Папа Карло, – рассказывал Буратино вечером, – мне сегодня повезло: я начал свое путешествие в замечательной точке, которая совпала с конечной точкой моего пути!

– Что ж тут необыкновенного? Если начать путь в любой точке на стороне и двигаться параллельно диагоналям четырехугольника, то ты всегда вернешься в начальную точку.

– Ладно, я завтра проверю это утверждение, буду стартовать из другой точки. Посмотрим, вернусь ли я в начало.

– Даже если вернешься, то ты лишь подтвердишь мои слова, но утверждение не докажешь. И вообще, сколько бы ни было примеров, подтверждающих утверждение, они ничего не доказывают.

Потом еще несколько дней Буратино гулял по Четырехугольному лесу, начинал свой путь в разных точках, но всегда при этом возвращался в точку старта.

Задача 1. *Проверьте утверждение папы Карло для своего четырехугольника и попробуйте доказать его.*

Через неделю Буратино отправился в Треугольный лес. Название понятное: лес имел форму треугольника.

– Папа Карло, настрой навигатор так, чтобы я снова возвращался в начальную точку своего пути. – попросил Буратино. – Я привык к таким путешествиям, да и в песне поется: *но так приятно возвращаться под крышу дома своего*!

– Хорошо, завтра навигатор поведет тебя параллельно сторонам Треугольного леса.

Снова Буратино пришел на опушку леса и отправился в путь. После двух поворотов он опять оказался у городской стены, но не там, где он начинал свой путь (рис.1,*в*).

– Наверное, навигатор сбился, – предположил Буратино. – Бывает, что и техника подводит. Что ж, проверю, пройду-ка я по лесу еще разок.

Его новый маршрут состоял из трех новых отрезков, параллельных сторонам треугольника. Но тут уже в конце пути его финишная точка совпала со стартовой!

– Нет, навигатор исправен. Как и обещал папа Карло, двигаясь параллельно сторонам треугольника, я всегда вернусь в начало пути. Только путь мой состоит теперь из шести отрезков! – сделал вывод Буратино.

– Ты прав, – подтвердил вечером за ужином папа Карло. – Твое путешествие можно назвать математическим экспериментом. Эксперимент привел тебя к некоторой гипотезе. А теперь докажи, что эта гипотеза верна.

Задача 2. *Докажите, что, двигаясь из произвольной точки на стороне треугольника параллельно его сторонам, мы после прохождения шести отрезков обязательно вернемся в исходную точку.*

– Однако, – продолжал папа Карло, – на опушке Треугольного леса есть такая точка, что, начав путь в этой точке, ты вернешься в нее, пройдя *только три* прямолинейных отрезка.

– Что ж, завтра я попробую такую точку подобрать-угадать!

– Не спеши, – возразил папа Карло. – На отрезке бесконечно много точек. Все их испытать-проверить невозможно. Ты ведь уже изучил азы геометрии? Возьми бумагу, карандаш и найди эту точку!

Буратино так и сделал.

Задача 3. *Найдите на стороне треугольника точку, из которой выходит замкнутая трехзвенная ломаная с вершинами на сторонах и звеньями, параллельными сторонам треугольника.*

Прошло еще несколько дней, и отправился Буратино в Правильнотреугольный лес. Лес этот имел форму правильного, другими словами, равностороннего треугольника. Теперь навигатор указывал направление, перпендикулярное стороне треугольника.

– И я снова вернусь в исходную точку? – спросил утром Буратино.

– Да, но только для специальной начальной точки, – отвечал папа Карло. – На опушке леса таких точек ровно две. Они делят опушку на три равные части. Из одной ты должен двигаться по часовой стрелке, а из другой – против. Пройдя три прямолинейных отрезка, ты непременно вернешься в начало пути.

Буратино так и сделал (рис. 1,*г*). Он прошелся и по одной трехзвенной ломаной (красного цвета), и по другой (синего цвета).

А однажды он решил выяснить, каким окажется путь вдоль перпендикуляров для произвольной начальной точки. И вот, положив в свой школьный ранец кусок пирога и фляжку с водой, – вдруг путь окажется длинным? – он отправился в дорогу.

Вначале ничего интересного не было. Пройдя три отрезка (на рисунке 2 они показаны синим цветом), он снова оказался на опушке леса у городской стены. Тут он, не останавливаясь, продолжил движение, следуя указаниям навигатора. Теперь он прошел еще три синих отрезка. Следующие три отрезка его пути – красного цвета. Каждый раз, попадая на опушку, он на песке отмечал точку, в которой он оказывался. И вот, неутомимо двигаясь вдоль ломаной линии по перпендикулярам к сторонам треугольника, Буратино заметил, что путь его пролегал по уже виденным

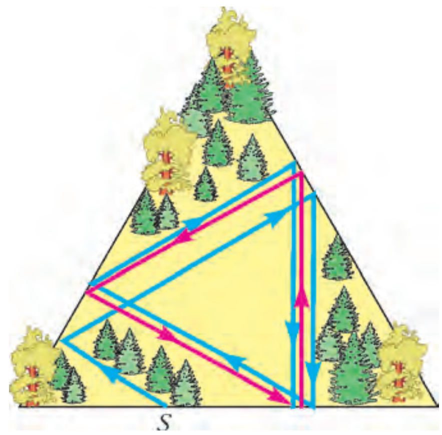


Рис. 2

им местам! А отметки, которые он делал на опушке, оказывались все ближе и ближе к стартовой точке его треугольного пути, показанного на рисунке 1,*г*. В конце концов он утомился и вернулся домой.

– Папа Карло, а что получилось бы, если б я продолжал и продолжал свой путь по перпендикулярам к сторонам правильного треугольника? – спросил Буратино после того, как рассказал о своих наблюдениях. – Я попал бы на замкнутую треугольную траекторию? Сколько бы я сделал кругов по лесу?

– Ответ такой, мой юный путешественник и любитель геометрии, – начал папа Карло. – Если говорить теоретически, то на треугольную траекторию попасть невозможно. Твой путь состоял бы из бесконечного количества звеньев. Но чем дольше бы ты шел, тем ближе три последовательных звена твоего пути располагались бы около сторон треугольника, который ты проходил, двигаясь из специальной точки на опушке. Соответственно, на опушке леса ты оказывался бы все ближе и ближе к специальной стартовой точке, делящей длину опушки в отношении 1:2.

– Очень интересно! – воскликнул Буратино. – А я могу доказать это строго математически?

– Попробуй! Для этого требуется знание геометрической прогрессии. Так что пока доказательство того, что я тебе сказал, можно отложить. А провести математический эксперимент на бумаге – совсем несложно.

Задача 4. *Начертите на бумаге несколько прямолинейных звеньев возможного пути Буратино вдоль перпендикуляров к сторонам правильного треугольника и убедитесь, что они действительно приближаются к одному из треугольных маршрутов на рисунке 1,г.*

На этом мы закончим нашу историю о прогулках Буратино по окрестным лесам. Потом в своей жизни он совершит еще много разных увлекательных путешествий, в которых ему всегда будет помогать геометрия. Но о них мы расскажем в другой раз.

Какие бывают рычаги

С.ДВОРЯНИНОВ

ИЗВЕСТНА СТАРАЯ ЗАДАЧА. ИМЕЮТСЯ НЕСКОЛЬКО ЗУБчатых колес, каждое следующее сцеплено с предыдущим (рис.1). Первое колесо вращается. Оно приводит в движение второе, второе – третье и так далее. В некоторый

Рис. 1. Сцепленные зубчатые колеса

момент в этой цепочке последнее колесо сцепили с первым. Смогут ли теперь все эти колеса вращаться?

Ответ на этот вопрос зависит от количества колес – от числа n. Предположим, что количество колес нечетное, например 13. Если первое колесо вращается по часовой стрелке, то второе – против часовой стрелки, третье – по часовой, четвертое – против и так далее. Каждое нечетное колесо вращается по часовой стрелке. Тринадцатое – тоже. Если его соединить с первым, то первое должно вращаться против часовой стрелки. Но это не так. Следовательно, все колеса этой системы одновременно вращаться не смогут. Можно сказать, что вращению мешает арифметическое препятствие, а именно – нечетность числа n.

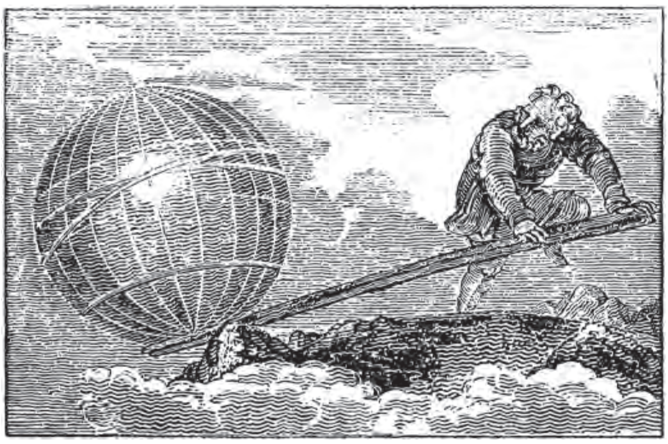


Рис. 2. Архимед, переворачивающий Землю с помощью рычага (старинная гравюра)

Об этой задаче Толя Втулкин вспомнил в седьмом классе, когда по физике стали изучать *рычаги* (рис.2) и *блоки*. Особенно ему нравилось, отвечая на вопрос учителя, говорить: «Неподвижный блок служит для изменения направления действия силы». Три *я* в конце слов он произносил с особым удовольствием, словно делая на них ударение. Полезность изменения направления силы Толик чувствовал очень хорошо. Одно дело накачивать велосипедное колесо ручным насосом, а другое – ножным. Тут давишь на педаль ногой, по сути просто-напросто встаешь на нее, и все. Легко и удобно. А при пользовании неподвижным блоком надо лишь подтягиваться на нем, как на канате в спортзале.

Потом появилось еще одно красивое слово – *полиспаст* (рис.3). Полиспаст – система подвижных и неподвижных блоков, тут уже получается выигрыш в силе.

Рис. 3. Шлюпбалка с полиспастом для спуска на воду и подъема шлюпок на борт

– А что если рассмотреть систему рычагов, последовательно связанных друг с другом? Например, так, как на рисунке 4? Будет ли она действовать? Посмотрим. Точка A под действием силы F движется вниз, точка B – вверх, точка C второго рычага – вниз... Вроде бы получается.

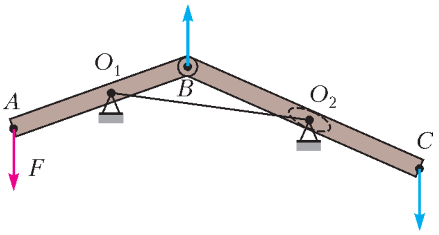


Рис. 4. Система двух связанных рычагов

Однако, нет. Такой полирычаг работать не может. И препятствие здесь –

геометрическое. Посмотрите на треугольник O_1BO_2 – в нем заданы длины всех трех сторон. Треугольник – фигура жесткая. Следовательно, никакое движение точки B, а потому и движение обоих рычагов, невозможно.

Можно ли спасти эту конструкцию и привести ее в движение? Можно. Например, так. Обычно точка опоры рычага – фиксированная точка. Сделаем теперь точку O_2 второго рычага переменной. Для этого поместим ее в прорезь на рычаге (она изображена пунктиром на рисунке 4). Тогда

Рис. 5. «Неизвестная» конструкция

длина отрезка BO_2 сможет меняться, треугольник O_1BO_2 по двум фиксированным сторонам O_1O_2 и BO_1 будет определяться неоднозначно, что и обеспечит возможность движения рычагов.

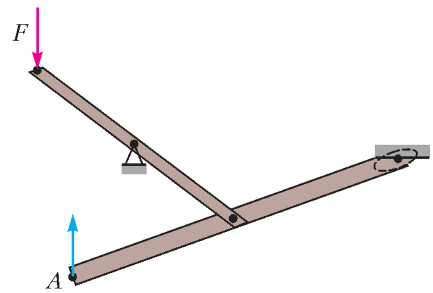


Рис. 6. Схема «неизвестной» конструкции

Применяется ли где-нибудь такая конструкция? Да. Посмотрите на фотографию, приведенную на рисунке 5. На ней видны неподвижная горизонтальная опора, два подвижных рычага, на один из которых сверху давит кнопка. Соответствующая схема конструкции показана на рисунке 6. Здесь верхний рычаг – это рычаг первого рода, а нижний рычаг – второго рода (в отличие от обоих рычагов на рисунке 4). Со стороны кнопки действует направленная вниз сила F. В итоге точка A движется вверх. Тем самым, эта система рычагов служит для изменения направления действия силы. К точке A можно прикрепить некоторый груз, который под действием силы F, приложенной к кнопке и направленной вниз, будет подниматься.

Толик Втулкин знает, что такое устройство имеется в очень многих квартирах. Что же это за устройство?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Столкновения нейтронов с атомами

С.ВАРЛАМОВ

«В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ НЕЙТРОнов их разделяют на 5 групп: *сверхбыстрые*, с начальной энергией 10–50 МэВ; *быстрые*, с энергией 100 кэВ – 10 МэВ; *промежуточные*, с энергией 1–100 кэВ; *медленные*, с энергией меньше 1 кэВ; *тепловые*, обладающие энергией теплового движения порядка 0,025 эВ. Основной вклад в ионизацию вещества вносят сверхбыстрые, быстрые и промежуточные нейтроны. В большинстве веществ нейтроны обладают высокой проникающей способностью и, соответственно, низким ионизирующим эффектом. Однако в биологических тканях, где велико содержание атомов водорода, проникающая способность нейтронов невысока вследствие их взаимодействия с протонами. Поэтому в биологических структурах быстрые нейтроны характеризуются высокой плотностью ионизации, что определяет исключительно высокую поражаемость живых объектов нейтронным облучением.»

Этот текст, взятый из интернета и слегка исправленный, несет информацию об ионизирующей способности нейтронного излучения. В нем указывается переходный диапазон энергий нейтронов (промежуточных) – от эффективных в смысле ионизации вещества этими нейтронами (быстрых и сверхбыстрых) к не эффективным в смысле ионизации (медленным). Известно, в частности, что существует особый тип ядерного оружия – «нейтронная бомба», предназначенная для поражения живой силы противника. При этом «неживая» материя под воздействием нейтронного излучения такой бомбы не теряет своих свойств.

А почему именно диапазон 1–100 кэВ является переходным (промежуточным)? Чтобы ответить на этот вопрос, решим школьными методами такую задачу:

К неподвижному атому водорода приближается нейтрон. После лобового столкновения нейтрона с протоном атом водорода оказывается ионизованным. Какой была кинетическая энергия нейтрона до столкновения? Ядерная реакция при таком ударе не состоялась.

В этой проблеме-задаче есть две раздельные части: а) удар нуклонов; б) разлет протона и электрона.

С ударом нуклонов (нейтрона и протона) при несостоявшейся ядерной реакции все достаточно просто: это абсолютно упругий удар двух тел практически одинаковой массы. В этом случае после взаимодействия протон может приобрести энергию отдачи в диапазоне от нуля (скользящий удар) до энергии, которую до удара имел нейтрон (лобовой удар).

Теперь рассмотрим взаимодействие протона и электрона. Известно, что для фотоионизации неподвижный атом водорода должен поглотить квант света с минимальной энергией 13,6 эВ. При этом в результате ионизации потенциальная энергия электростатического взаимодействия электрона и

(Продолжение см. на с. 34)

Тенсегрити

Как связать три одинаковые прямые палки веревками так, чтобы палки друг друга не касались (даже через веревку), но получилась бы жесткая конструкция (в которой никакую палку нельзя пошевелить, кроме как двигая всю конструкцию целиком)?

Фото 1

Ответ приведен на фото 1. Все веревки в этой конструкции натянуты.

Оказывается, похожим образом можно связать и четыре палки (фото 2), и даже любое их количество (фото 3)! При этом получится фигура, похожая на *однополостный гиперболоид* (подробнее о гиперболоиде читайте в статье Д. Фукса «Прямые на

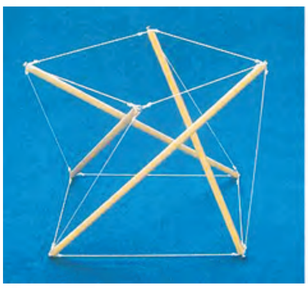


Фото 2

Фото 3

кривых поверхностях» в «Кванте» № 12 за 1989 год). Интересно, что форму гиперболоида имеют секции знаменитой Шуховской башни на Шаболовке в Москве.

У жестких конструкций, состоящих из не касающихся друг друга палок, связанных натянутыми веревками, есть общее название: «тенсегрити». Слово образовано слиянием двух английских слов: «tension» —

Фото 4. «Легкая посадка» (штат Мэриленд, США)

Фото 5. «Радуга»

натяжение и «integrity» — целостность, единство. Этот термин придумал американский архитектор-дизайнер Бакминстер Фуллер (кстати, в его честь названы гигантские «сферические» молекулы из атомов углерода — *фуллерены*). В каком-то смысле, конструкция тенсегрити сама находится в натяжении, без чьей-то помощи — отсюда и название. Фуллера привлекла жесткость и легкость таких конструкций.

Фото 6. Башня «Игла — II» (музей Крёллер-Мюллер, Оттерло, Нидерланды)

Вес экономится потому, что не нужно делать весь каркас из металлических балок — некоторые его элементы можно заменить натянутыми тросами.

На фотографиях 4–7 показаны несколько работ известного скульптора Кеннета Снельсона, одного из

Фото 7. «Дракон»

изобретателей тенсегрити. Удивительно, насколько разнообразной может быть форма конструкций тенсегрити. Кстати, Снельсон предпочитает называть принцип, по которому устроены тенсегрити, «свободным сжатием» («floating compression»).

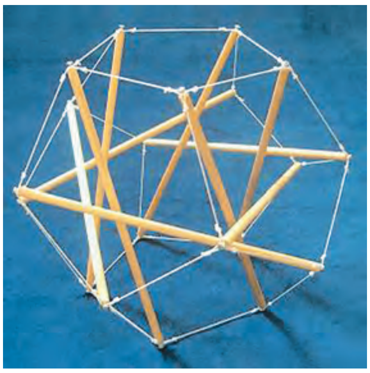


Фото 8. Тенсегрити-додекаэдр

А вот додекаэдр (фото 8) – многогранник, у которого 12 граней и все грани правильные пятиугольники. Его тоже можно сделать из палок и натянутых веревок.

Еще одним примером тенсегрити была башня «Скайлон», установленная в 1951 году близ Темзы в Лондоне на время Фестиваля Британии. Башня как будто парила в воздухе (фото 9).

Фото 9. Башня «Скайлон»

Можно вместо веревок взять ткань и построить жесткую конструкцию по принципу тенсегрити. Под руководством Казухиро Кадзима 70 студентов университета Токио построили тенсегрити-тент (фото 10).

Фото 10. Тенсегрити-тент

В городе Брисбен в Австралии построен тенсегрити-мост для пешеходов и велосипедистов (фото 11). В ночное время мост освещается от солнечных батарей, которые способны накапливать всю необходимую энергию в течение дня при ясной погоде.

Материал подготовил М.Прасолов

Источники фотографий:
фото 1, 2, 3, 8 – TensegrityWiki, flickr.com
фото 6 – Саку Такакусаки, википедия
фото 10 – Садао Хотта
фото 11 – Elver, flickr.com

Фото 11. Тенсегрити-мост

(Начало см. на с. 31)

протона увеличивается от $-27{,}2$ эВ до нуля, а кинетическая энергия электрона уменьшается от $+13{,}6$ эВ до нуля. Можно считать, что поглощенная энергия кванта света сначала превращается в кинетическую энергию электрона, а затем эта кинетическая энергия электрона переходит в потенциальную энергию системы электрон–протон. Увеличение кинетической энергии электрона вдвое (в системе отсчета, где протон имеет нулевую скорость) дает ему возможность улететь от ядра. Величина скорости электрона относительно ядра (протона) при этом увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. Понятно, что относительная скорость электрона и протона не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Перейдем в такую систему отсчета, в которой протон после столкновения с нейтроном имеет нулевую скорость. Скорость электрона в новой системе отсчета $\vec{v}_2$ сложится из относительной скорости систем отсчета $\vec{v}_0$ и относительной скорости ядра и электрона в начальной системе отсчета $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 .$$

Чтобы в результате удара нуклонов произошла ионизация атома водорода, величина относительной скорости движения электрона массой m_e и протона массой $M_p = M_n$ должна увеличиться в $\sqrt{2}$ раз. Это возможно, только если начальная кинетическая энергия нейтрона не меньше величины

$$\frac{M_n v_1^2}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \frac{M_n}{m_e}\frac{m_e v_1^2}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2000 \cdot 13{,}6 \text{ эВ} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \approx 4{,}3 \text{ кэВ} .$$

Заметим, что при такой начальной энергии нейтрона удар должен быть обязательно лобовым и электрон в момент удара должен иметь скорость, направленную противоположно скорости налетающего нейтрона. Если же скорость электрона в момент удара направлена не так, то ионизация атома водорода при этой начальной энергии нейтрона не произойдет.

Можно это утверждение сформулировать по-другому: вероятность ионизации атома водорода после лобового удара нейтрона и ядра этого атома равна нулю при энергиях налетающего нейтрона меньших или равных 4,3 кэВ. Если начальная энергия нейтрона больше 4,3 кэВ, то при лобовом ударе нуклонов ионизация может состояться или не состояться, и это определяется направлением скорости электрона в момент удара. Или, другими словами, вероятность ионизации не равна нулю, и она тем больше, чем больше начальная энергия нейтрона. Ионизация атома водорода после лобового удара его ядра и нейтрона произойдет обязательно (как бы ни была направлена скорость электрона в момент удара), если кинетическая энергия нейтрона больше величины

$$\frac{M_n}{m_e} \cdot 13{,}6 \text{ эВ} \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \approx 146 \text{ кэВ} .$$

Иными словами, при лобовом ударе и энергии нейтрона больше 146 кэВ вероятность ионизации равна 100%.

Вспомним, что в самом начале решение нашей задачи мы назвали «школьным». В действительности даже при такой большой энергии нейтрона до лобового удара, конечно, имеется ненулевая вероятность того, что электрон останется связанным с протоном, т.е. что ионизация атома водорода не произойдет. В книге А.Б.Мигдала «Качественные методы в квантовой теории» приведена задача с таким условием:

Какова вероятность p того, что атом водорода останется в основном состоянии после удара нейтрона и протона, при котором ранее неподвижный протон получает скорость u?

Вот краткое решение этой задачи. Если отношение скорости протона u к скорости электрона v, движущегося вокруг неподвижного протона в атоме водорода (в основном состоянии), обозначить x, $x = u/v$, то эта вероятность равна $p = \left(1 + x^2/4\right)^{-4}$. Даже при отношении скоростей $x = \sqrt{2}+1$ эта вероятность не равна нулю: $p \approx 0{,}0274$. Куда же девается избыточная, по сравнению с энергией в основном состоянии, кинетическая энергия электрона, измеренная в системе отсчета протона? Атом после удара может перейти в возбужденное состояние, затем излучить квант света, опустившись на более низкий энергетический уровень. И такой процесс излучения может произойти не один раз. Другими словами, избыточная кинетическая энергия в итоге превращается в энергию света.

Полученный в результате решения нашей «школьной» задачи диапазон начальных энергий нейтрона 4,3–146 кэВ, при которых возможна ионизация атома водорода, подвергшегося «лобовой нейтронной бомбардировке», весьма близок к диапазону энергий так называемых промежуточных нейтронов 1–100 кэВ. Если атом водорода включен в состав молекулы какого-нибудь сложного химического вещества, которое, в частности, может входить в состав биологической ткани, то электрон атома водорода не целиком принадлежит только этому атому, он связан еще и с соседними атомами молекулы. Поэтому для «отрыва» от этого электрона протону, получившему «толчок» от нейтрона, может потребоваться меньшая энергия. Освободившийся от электрона протон, двигаясь в веществе, раздает свою энергию отдачи, ионизуя молекулы, через которые или рядом с которыми он пролетает. А если протон получил недостаточную энергию отдачи, то он летит вместе с «прицепившимся» к нему электроном, т.е. летит в целом нейтральная частица, которая, естественно, обладает значительно меньшей ионизационной способностью, чем электрически заряженная частица.

Столкновения нейтронов с ядрами других, более тяжелых атомов менее эффективны в смысле ионизационной способности ядер отдачи, потому как скорости отдачи, полученные такими тяжелыми ядрами после упругого удара с нейтроном, гораздо меньше. Пусть, например, нейтрон, имевший до удара скорость v, сталкивается «лоб в лоб» с ядром, имеющим массу, равную N массам нейтрона M_n. Как хорошо известно, ядро, покоившееся до лобового удара, после абсолютно упругого удара приобретает скорость, равную удвоенной скорости центра масс системы нейтрон–ядро: $u = 2v/(N+1)$. Для ионизации атома необходима минимальная скорость отдачи, равная $v_1\left(\sqrt{2}-1\right)$. Если считать, что энергия ионизации тоже равна 13,6 эВ, то минимальная энергия нейтрона, при которой вероятность ионизации атома отлична от нуля, будет равна

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \frac{M_n}{m_e}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cdot 13{,}6 \text{ эВ} \approx \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \cdot 4{,}3 \text{ кэВ} .$$

Даже для такого ядра, как дейтерий с массой примерно $2M_n$, энергия налетающего нейтрона должна стать в 2,25 раза больше, чем для ядра водорода, т.е. должна составлять приблизительно 9,675 кэВ. А для атома с массой $12M_n$ (такова масса ядра атома углерода, для которого энергия ионизации равна примерно 11,26 эВ) начальная энергия нейтрона должна вырасти примерно в 42 раза и достичь величины 181,7 кэВ.

Из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что «промежуточные» нейтроны могут «ударно» ионизовать только атомы водорода, а облучение вещества более энергичными нейтронами может привести к ионизации и других атомов, входящих в состав различных биологических тканей.

Истории с маятником

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

Существует множество историй, связанных с маятником. Можно начать с Галилео Галилея. Наблюдая, как раскачивается люстра в Пизанском соборе, он понял, что период колебаний люстры не зависит от размаха ее колебаний. Исследуя движения маятника и других тел, Галилей заложил основы механики.

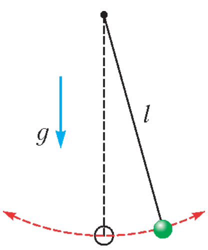


Рис. 1. Простой математический маятник

Христиан Гюйгенс продолжил эти исследования. Он нашел формулу для периода малых колебаний математического маятника (рис.1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

в которой l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Одно из выдающихся достижений Гюйгенса – создание первых маятниковых часов.[1]

Французский физик Леон Фуко использовал гигантский маятник для демонстрации суточного вращения Земли, а английский математик и астроном Джордж Эйри с помощью маятника, спущенного в шахту, измерил среднюю плотность Земли.

Ну а мы ограничимся здесь самым малым – расскажем несколько собственных историй про *двухчастотный* маятник.

История первая. Летом 2008 года мы сводили своих студентов-оптиков на выставку «Зазеркалье», проходившую в московском Манеже. Больше всего там было как раз про оптику, но встречались и другие физические экспонаты и эксперименты. Среди них был один необычный маятник, траектория которого заполняла целый прямоугольник (рис.2). В качестве груза в этом маятнике использовалась металлическая емкость, заполненная мелким песком, который тонкой струйкой вытекал через отверстие в дне емкости и вычерчивал траекторию маятника.

Естественно было бы ожидать, что маятник будет двигаться по эллиптической или круговой траектории, может быть даже по отрезку, но мы видели, что здесь это совсем не так. Дело тут в подвеске маятника, которая полностью не видна на фотографии. В отличие от простого маятника, у этого маятника не одна, а две точки подвеса и струны, на которых он висит, соединены в виде буквы Y (рис.3). Такой маятник может совершать два простых колебания. Перпендикулярно плоскости рисунка он будет колебаться, как обычный маятник с длиной $l = l_1 + l_2$, а в плоскости рисунка – как маятник с длиной $l = l_2$. Периоды этих колебаний будут равны, соответственно,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}\,.$$

[1] Об исследованиях Галилея и Гюйгенса можно прочесть в книге *С.Г.Гиндикина* «Рассказы о физиках и математиках» (М.: МЦНМО, НМУ, 2006).

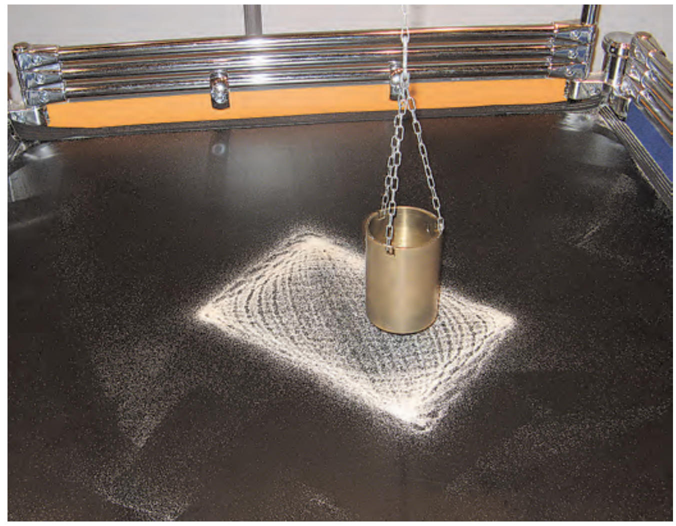


Рис. 2. Траектория этого маятника заполняет весь прямоугольник

Можно сказать, что любые малые колебания такого маятника являются смесью двух взаимно перпендикулярных колебаний с указанными периодами. Если эти периоды несоизмеримы, то траектория маятника плотно заполняет некоторый прямоугольник. Если же периоды соизмеримы, т.е. относятся друг к другу как целые числа, то траектория маятника замкнутая и периодическая и тоже вписана в прямоугольник. Периодические траектории, получающиеся при сложении двух гармонических колебаний с соизмеримыми периодами, называются фигурами Лиссажу (по имени французского физика Жюля Лиссажу, разработавшего специальный метод исследования сложения таких колебаний).

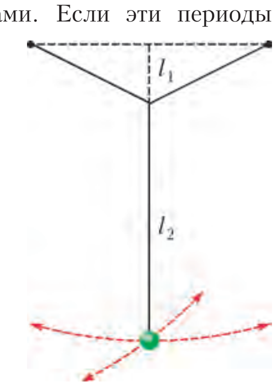


Рис. 3. Так устроен двухчастотный маятник

В любом случае, прямоугольник на рисунке 2 появляется в результате сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

История вторая. Нам захотелось самим иметь такой двухчастотный маятник, и мы поручили сделать его одному из своих студентов. Но что-то у него не заладилось. Возникли трудности с грузом-емкостью для песка, с дыркой, через которую песок должен был сыпаться, да и с самим песком тоже. Один из авторов статьи предложил сменить студента, другой – поменять схему эксперимента; сошлись на последнем.

В результате к массивному грузу была прикреплена лазерная указка, направленная вниз на расстеленный на полу лист ватмана (рис.4). Маятник запускался и в темноте с большой выдержкой фотографировался след, оставляемый указкой (рис.5).

Оказалось, что с лазером экспериментировать проще, чем с песком.

Предыстория. В отличном ролике В.И.Гервидса «Фигуры Лиссажу: запись песком», выложенном в YouTube[2], двухчастотный маятник называется маятником Эйри. Это название часто используется у нас. Но, по-видимому, связа-

[2] В YouTube имеется целая коллекция замечательных экспериментов В.И.Гервидса. Посмотрите их обязательно.

Рис. 4. Двухчастотный маятник, снабженный лазерной указкой

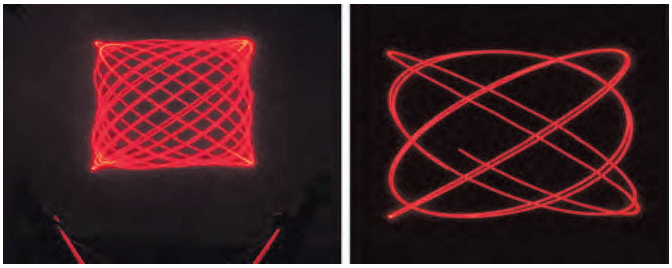


Рис. 5. Траектории маятника, нарисованные лазерным лучом

но оно не с королевским астрономом Джорджем Эйри, а с его сыном Хьюбертом, опубликовавшим в 1871 году в журнале «Nature» («Природа») статью под названием «Pendulum autographs» («Автографы маятника»). Там младший Эйри рассказал, как он следил за колебаниями веточки акации, выросшей из старого пня. С помощью отца ему удалось разобраться, что эти колебания складываются из двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. А первый автограф у этого маятника на листе бумаге он получил, прикрепив к ветке обычный карандаш.

(Стоит сказать, что в англоязычной литературе двухчастотный маятник все-таки чаще называется маятником Блэкберна, по имени шотландского математика, описавшего его в своей публикации 1844 года.)

Еще одна история. В 2004 году в журнале «Успехи физических наук» была опубликована статья Б.Я.Зельдовича и М.Дж.Суало «Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений».[3] Вот отрывок из аннотации к этой статье:

«В заметке описываются демонстрации, адресованные четырем группам, различающимся возрастом и образованием: от младших школьников до выпускников средней школы; от школьников 7–10 классов до третьекурсников вузов; от первокурсников до аспирантов; от старшекурсников вузов до научных работников... Большинство физических идей могут быть поняты на уровне школьников 6–8 классов...»

В статье описаны многочисленные опыты с двухчастотным маятником, установленном на вращающейся платформе и снабженном двумя микровентиляторами, управляемыми компьютером.

В первой части статьи, предназначенной для школьников и их учителей, рассказано о принципе суперпозиции, резонансе, поляризации, зависимости периода колебаний маятника от его длины, о биениях в двухчастотном маятнике, а также о цветах деформированной пластмассы, помещенной между скрещенными поляризаторами.

Б.Я.Зельдович, написавший эту статью, – сын известного ученого, академика Я.Б.Зельдовича. В связи с этим приведем еще одну цитату из аннотации:

«Двухчастотный маятник, привязанный к паре гвоздей в дверном проеме, был частью обучения детей физике в семье покойного Я.Б.Зельдовича, где в 1950-х один из авторов (Б.Я.З.) и подхватил основную идею».

Еще в статье написано, что вместо маятника «для демонстрации фигур Лиссажу удобнее использовать электронный осциллограф или компьютерную графику», но мы уже убедились, что это не совсем так.

* * *

Наконец, в англоязычной Википедии есть отличная статья про маятник – «Pendulum», снабженная огромным числом полезных ссылок.

[3] См. журнал «Успехи физических наук», т.174, с.1337–1354, декабрь 2004 г. Вы можете найти эту статью на сайте журнала, там доступны полные тексты всех статей с момента их публикации.

НАШИ ОБЛОЖКИ

Двухчастотный маятник

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Коллаж, представленный на обложке, это иллюстрация к нашей статье «Истории с маятником». Двухчастотный маятник с Y-образным подвесом с помощью лазерного луча выписывает на листе бумаги фигуру Лиссажу. (На заднем плане изображена траектория двухчастотного маятника, полученная нами в одном из реальных экспериментов.)

Нарисованная лазерным лучом кривая вписана в прямоугольник и касается одной его стороны 3 раза, а другой – 2 раза. Это означает, что отношение периодов колебаний двухчастотного маятника равно 3:2. Отсюда получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{(l_1+l_2)/g}}{2\pi\sqrt{l_2/g}} = \sqrt{\frac{l_1+l_2}{l_2}} = \frac{3}{2},$$

а значит,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{5}{4}, \text{ и } l_1 = \frac{5}{4} l_2 .$$

У нас же, судя по рисунку, $l_1 < l_2$. Противоречие.

Но коллаж – он и есть коллаж, а не реальная фотография реального эксперимента.

А.Андреев, А.Панов

Пять зацепленных тетраэдров

Инструкция по сборке

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Каждый тетраэдр состоит из шести одинаковых частей, каждая часть складывается из одной прямоугольной полоски бумаги с отношением сторон 1 к 3. Такие полоски удобно получить, разрезав квадратный лист бумаги на три равные части. Рекомендуем делать тетраэдры разных цветов, для этого потребуется по два квадратных листа каждого цвета.

Каждую из $5\times6=30$ полосок нужно складывать следующим образом:

1

Перегните посередине и разогните.

2

Сложите оба края к середине (и не разгибайте).

3

Согните края к середине и разогните, наметив две складки.

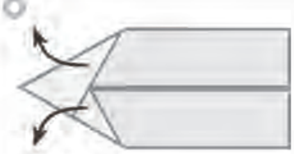
4

Приложите нижний угол к верхней складке.

5

Аналогично поступите с верхним углом.

6



Разогните.

7

Сложите нижний угол вовнутрь.

8

Согните и разогните верхний угол, как на рисунке.

9

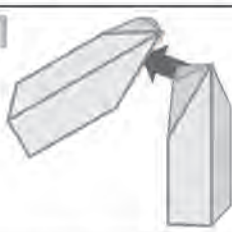
Переверните полоску и повторите шаги с 3 по 8 для второго конца.

10

Сложите полоску посередине.

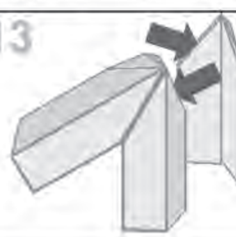
Каждая из 30 получившихся деталей станет «ребром» тетраэдра. В каждой вершине соединяются три «ребра»:

11



12

13



14

Теперь, последовательно соединяя детали, вы получите пять зацепленных друг за друга тетраэдров:

15

Соедините 6 деталей одного цвета, чтобы получился первый тетраэдр.

16

17

У второго и третьего тетраэдров удобно сначала собрать один угол (чтобы получилась «тренога»). Расположите его правильно в уже собранной конструкции, а затем зафиксируйте оставшимися тремя ребрами, достроив до тетраэдра.

18

Четвертый и пятый тетраэдры достраиваются аналогично.

Задачи на изменение энергии системы

А.ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЗАДАЧИ, ДЛЯ РЕшения которых надо применять не закон сохранения механической энергии, а формулу для ее изменения:

$$\Delta E_{мех} = A_{внеш} + A_{неконс} . \qquad (1)$$

Эта формула выводится непосредственно из законов Ньютона. Сделаем несколько замечаний, важных для дальнейшего ее применения.

1) Механическая энергия E_{max} равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия может быть введена для любого из консервативных взаимодействий между телами системы (тяготение, упругое или кулоновское взаимодействие). Кроме того, в потенциальную энергию включают энергию тел системы во внешних потенциальных полях (поле тяжести, внешнее электростатическое поле).

2) Отметим сразу, что вопрос о том, считать ли силу тяжести внешней силой или считать ее силой взаимодействия между телом и Землей (которую в этом случае мысленно включают в систему), это вопрос договоренности и на решение задач не влияет.

3) Работа $A_{внеш}$ включает в себя работу всех внешних сил, кроме тех, которые уже учтены в потенциальной энергии в виде внешних потенциальных полей. В задачах это чаще всего работа внешней постоянной силы (силы тяги) и работа сторонних сил источника тока.

4) Работа $A_{неконс}$ включает в себя работу неконсервативных сил, для которых невозможно ввести потенциальную энергию (их работа по замкнутому пути отлична от нуля). Особо выделяют диссипативные силы и прежде всего силу трения (а также силу сопротивления и пластические неупругие силы, возникающие при неупругом ударе). Полная работа этих сил в системе всегда отрицательна (точнее, не положительна). Взятая с противоположным знаком, она равна увеличению внутренней тепловой энергии за счет уменьшения механической энергии системы:

$$-A_{тр} = \Delta E_{внутр} = Q . \qquad (2)$$

(Подчеркнем, что Q является условным обозначением для приращения внутренней тепловой энергии за счет трения, теплообмена при этом не происходит.) Кроме того, к неконсервативным силам, встречающимся в задачах, относятся силы, возникающие при взрывах и других химических реакциях, когда внутренняя химическая энергия переходит в механическую, а также силы, развиваемые механизмами (например, человеком), при работе которых также происходит изменение механической энергии.

5) Отметим, что любое консервативное взаимодействие (и любое потенциальное поле) может быть учтено в уравнении (1) как в виде потенциальной энергии в левой части, так и в виде работы в правой части (напомним, что работа любой консервативной силы равна изменению своей потенциальной энергии с противоположенным знаком: $A_{конс} = -\Delta E_{пот}$). Если все консервативные взаимодействия учесть не в виде потенциальной энергии, а в виде работы, то выражение (1) превратится в теорему о кинетической энергии.

Начнем с решения задач, где изменение энергии происходит только за счет внутренних диссипативных сил (чаще всего, трения). В этом случае полная энергия системы – механическая плюс внутренняя – сохраняется, и уравнение (1) приобретает вид закона сохранения энергии:

$$E_{нач} = E_{кон} + Q . \qquad (3)$$

Если увеличение внутренней энергии происходит за счет работы сил трения, то увеличение внутренней энергии (выделившееся количество теплоты) связано с работой сил трения формулой (2).

Задача 1. *С наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, с высоты $h_1 = 1$ м соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска у основания наклонной плоскости шайба абсолютно упруго ударяется о стенку и поднимается вверх по наклонной плоскости. На какую высоту h_2 поднимется шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,25$?*

Решение. Эту задачу можно решить и в рамках динамики, вычисляя последовательно ускорение шайбы при движении вниз, скорость в нижней точке, ускорение при движении вверх, пройденное вверх расстояние. Однако энергетический подход выглядит проще, особенно с учетом того, что при движении как вниз, так и вверх $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

Записывая закон сохранения энергии

$$E_1 = E_2 + Q$$

и подставляя

$$E_1 = mgh_1 , \quad E_2 = mgh_2 ,$$

$$Q = -A_{тр} = \mu mg\cos\alpha\left(\frac{h_1}{\sin\alpha} + \frac{h_2}{\sin\alpha}\right),$$

найдем h_2:

$$h_2 = h_1\frac{1-\mu\operatorname{ctg}\alpha}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha} = 0,6 \text{ м}.$$

Замечание. Можно не привлекать понятие внутренней энергии, а формально записать формулу (1) для изменения энергии в виде

$$E_2 - E_1 = A_{тр} ,$$

но при этом не забыть взять $A_{тр}$ со знаком «минус».

Задача 2. *Тонкий стержень длиной $l = 1$ м может соскальзывать вдоль своей длины по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом ($\operatorname{tg}\alpha = 0,2$). Верхняя часть плоскости является для стержня гладкой, а нижняя, начиная с некоторой горизонтальной границы, – шероховатой с коэффициентом трения $\mu = 0,6$ (рис.1). На каком*

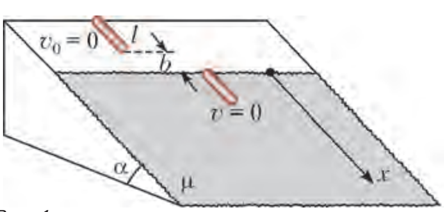


Рис. 1

расстоянии b выше этой границы должен находиться нижний конец стержня в начале движения, чтобы стержень остановился в тот момент, когда полностью заедет на шероховатую поверхность?

Решение. В этой и в нескольких следующих задачах движение происходит с переменным ускорением, и динамически-кинематический подход становится неприемлемым.

Ускорение стержня определяется проекцией силы тяжести и силой трения. Поскольку сила трения действует только на ту часть стержня, которая заехала на шероховатую поверхность, ускорение зависит от x и движение не является равноускоренным. Однако благодаря тому, что сила трения линейно зависит от x, работа силы трения может быть рассчитана как площадь треугольника на графике зависимости $F_{\text{тр}}(x)$:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0 + \mu mg\cos\alpha}{2} l .$$

Принимая конечную потенциальную энергию за ноль, уравнение

$$E_1 = E_2 + |A_{\text{тр}}|$$

приведем к виду

$$mg(l+b)\sin\alpha = \frac{\mu mgl\cos\alpha}{2},$$

откуда получим

$$b = l\left(\frac{\mu}{2}\operatorname{ctg}\alpha - 1\right) = 0{,}5 \text{ м}.$$

Видно, что минимальный коэффициент трения, при котором задача имеет решение, равен $2\operatorname{tg}\alpha$. В этом случае сила трения $F_{\text{тр}}(x) = \mu mg\frac{x}{l}\cos\alpha$ уравновешивается проекцией силы тяжести $mg\sin\alpha$ при $x = l/2$, ускорение меняет знак, и стержень, отпущенный от самой границы ($b = 0$), останавливается при $x = l$.

Задача 3. *Тело массой $m = 5$ кг, лежащее на горизонтальной плоскости, соединено с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость $k = 100$ Н/м, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}4$. Телу сообщают скорость $v_0 = 1$ м/с, направленную вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию пружины.*

Решение. Здесь, а также в задачах 4 и 5 ускорение является переменным благодаря действию силы упругости.

Запишем закон сохранения энергии (3) с учетом формулы (2):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + (\mu mg)x .$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$x = 0{,}1 \text{ м}.$$

Задача 4. *Брусок массой $m = 0{,}5$ кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α ($\sin\alpha = 0{,}6$). Брусок соединен с вершиной наклонной плоскости недеформированной пружиной жесткостью $k = 64$ Н/м. Какую скорость надо сообщить бруску вверх вдоль плоскости, чтобы он вернулся в начальную точку и остановился там? Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}8$.*

Решение. Для решения задачи рассмотрим три состояния бруска: начальное ($v = v_0$, $h = 0$, $x = 0$), промежуточное ($v = 0$, $h = s\sin\alpha$, $x = s$) и конечное ($v = 0$, $h = 0$, $x = 0$), где s – расстояние, пройденное бруском до остановки. Запишем закон сохранения энергии для двух пар состояний –для начального и конечного и для промежуточного и конечного:

$$\frac{mv_0^2}{2} = (\mu mg\cos\alpha)\cdot 2s,$$

$$mgs\sin\alpha + \frac{ks^2}{2} = (\mu mg\cos\alpha)\cdot s.$$

Выражая s из второго уравнения и подставляя в первое, получаем

$$v_0 = g\sqrt{8\mu\frac{m}{k}(\mu - \operatorname{tg}\alpha)}\cos\alpha = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Задача 5. *Два одинаковых тела массой $m = 5$ кг каждый соединены недеформированной пружиной жесткостью $k = 15$ Н/м и лежат на горизонтальном полу. Какую минимальную скорость, направленную вдоль оси пружины, надо сообщить одному из тел, чтобы оно сдвинуло другое тело? Коэффициент трения для каждого тела $\mu = 0{,}1$.*

Решение. При минимальной скорости первого тела в момент его остановки пружина растянется (сожмется) настолько, что второе, неподвижное, тело окажется на грани скольжения:

$$kx = \mu mg$$

(x – деформация пружины, равная расстоянию, пройденному первым телом). Запишем закон сохранения энергии для первого тела:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx .$$

Выражая x из первого уравнения и подставляя во второе, находим

$$v_0 = \mu g\sqrt{\frac{3m}{k}} = 1 \text{ м/с}.$$

Задача 6. *На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной $l = 1$ м, на одном конце которой закреплен вертикальный упор. Какую минимальную скорость надо сообщить маленькому бруску, лежащему на другом конце доски, чтобы после абсолютно упругого удара об упор брусок вернулся назад и упал с доски? Масса доски в 8 раз больше, чем масса бруска, коэффициент трения между ними $\mu = 0{,}2$.*

Решение. В этой задаче закон сохранения энергии применим совместно с законом сохранения импульса.

При минимальной скорости v_0 бруска он после удара об упор возвращается в начальную точку, в этот момент скольжение бруска по доске прекращается и доска с бруском начинают двигаться как единое целое. Конечную скорость системы найдем из закона сохранения импульса

$$mv_0 = (m+M)v .$$

В законе сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v^2}{2} + |A_{\text{тр}}|$$

работа сил трения выражается через относительное перемещение бруска по доске. Так, при движении бруска до удара об упор полная работа сил трения равна

$$A_{\text{тр1}} = -F_{\text{тр}}s_{\text{бр}} + F_{\text{тр}}s_{\text{д}} = -F_{\text{тр}}l$$

($s_{\text{бр}}$, $s_{\text{д}}$ – перемещения бруска и доски относительно земли). То же самое получается при движении бруска назад. Отметим, что при ударе об упор энергия системы не меняется, и поэтому удар никак не проявляется в уравнениях. Закон сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v^2}{2} + \mu mg\cdot 2l .$$

Подставляя сюда v из закона сохранения импульса, получим

$$\frac{mM}{m+M}\frac{v_0^2}{2} = 2\mu mgl,$$

откуда, с учетом равенства $M = 8m$, найдем

$$v_0 = \sqrt{\frac{9}{2}\mu gl} = 3 \text{ м/с}.$$

В следующих задачах происходит превращение внутренней энергии в механическую.

Задача 7. *Из орудия массой $m_1 = 990$ кг вылетает горизонтально снаряд массой $m_2 = 10$ кг. Какая часть энергии, выделяющейся при взрыве пороховых газов, расходуется на откат орудия?*

Решение. В данном случае часть внутренней химической энергии порохового заряда превращается в механическую энергию орудия и снаряда за счет работы неконсервативных сил, действующих на эти тела со стороны расширяющихся раскаленных газов, которые возникают при сгорании порохового заряда. Конечно, не вся энергия, выделившаяся при сгорании заряда, превращается в механическую энергию указанных двух тел – часть энергии идет на нагревание газов, снаряда и пушки, на кинетическую энергию горячих газов и т.д. Правильнее было бы спросить, какая часть добавочной *механической энергии* системы двух тел достается орудию. Тогда ответ выглядит так:

$$\eta = \frac{m_1 v_1^2/2}{\left(m_1 v_1^2/2\right) + \left(m_2 v_2^2/2\right)} .$$

Скорости снаряда и орудия связаны законом сохранения импульса

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 .$$

Выражая v_2 через v_1 и подставляя в первую формулу, получаем

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}01 .$$

Видно, что бóльшая часть энергии достается более легкому телу, хотя импульсы обоих тел одинаковы. Это утверждение имеет важное значение для ядерной физики. При альфа-распаде тяжелого ядра масса альфа-частицы в десятки раз меньше массы нового ядра, и поэтому подавляющая часть энергии достается альфа-частице. А уж при бета-распаде энергия отдачи ядра вообще пренебрежимо мала.

Задача 8. *Конькобежец катил нагруженные сани по льду со скоростью $v = 4$ м/с, а затем толкнул их вперед и отпустил. Какую работу совершил конькобежец, если скорость саней возросла до $v_1 = 8$ м/с? Масса саней $m_1 = 70$ кг, масса человека $m_2 = 80$ кг.*

Решение. В этом случае внутренняя энергия организма человека превращается в дополнительную механическую энергию системы человек + сани за счет работы неконсервативной мускульной силы человека. В соответствии с формулой (1),

$$A_{\text{чел}} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} .$$

Недостающую скорость человека v_2 найдем из закона сохранения импульса

$$(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 + m_2 v_2 .$$

Проведя вычисления, получим

$$A_{\text{чел}} = 1050 \text{ Дж}.$$

Задача 9. *Два одинаковых шарика, сделанных из вещества с удельной теплоемкостью $c = 450$ Дж/(кг·К), движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 40$ м/с и $v_2 = 20$ м/с. Определите, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого столкновения.*

Решение. Применение формул термодинамики совместно с законом сохранения энергии позволяет вычислить температурный эффект неупругого соударения.

Запишем закон сохранения энергии с учетом перехода части механической энергии во внутреннюю за счет работы неконсервативных пластических сил, возникающих при неупругом ударе:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{(2m)v^2}{2} + Q .$$

Конечную скорость системы v найдем из закона сохранения импульса

$$mv_1 - mv_2 = 2mv ,$$

а приращение внутренней энергии свяжем с увеличением температуры шаров:

$$Q = c(2m)\Delta T .$$

После преобразований получим

$$\Delta T = \frac{(v_1 + v_2)^2}{8c} = 1 \text{ К}.$$

Задача 10. *В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия. На поршне лежит груз с массой, равной массе поршня. Груз мгновенно убирают и дожидаются прихода системы к равновесию. Во сколько раз увеличится высота, на которой окажется поршень? Над поршнем газа нет.*

Решение. В этом случае происходит увеличение механической энергии поршня за счет уменьшения внутренней энергии идеального газа. Сила давления газа, совершающая над поршнем работу, представляет собой пример неконсервативной силы.

Запишем закон сохранения энергии системы с учетом внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2 ,$$

где m – масса поршня, ν – количество молей гелия. Отметим, что начальное состояние – это состояние сразу *после* удаления груза, т.е. момент начала движения поршня. Начальное давление выразим из условия равновесия поршня с грузом, а конечное – из условия равновесия поршня без груза

$$p_1 S = (2m)g, \quad p_2 S = mg$$

и подставим в уравнения Менделеева–Клапейрона

$$p_1(Sh_1) = \nu RT_1, \quad p_2(Sh_2) = \nu RT_2 .$$

Получим

$$\nu RT_1 = 2mgh_1, \quad \nu RT_2 = mgh_2 .$$

Теперь из закона сохранения энергии найдем

$$h_2 = 1{,}6 h_1 .$$

Следующая задача аналогична задаче 5, но роль силы упругости пружины здесь играет сила кулоновского отталкивания.

Задача 11. *Два небольших тела массой $m = 5$ г каждое, заряженные одним и тем же зарядом $q = 10$ мкКл, находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии $r_0 = 10$ м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость $\mu = 0{,}5$. Какую минимальную начальную скорость надо сообщить одному из тел, чтобы сдвинуть с места второе тело?*

Решение. Чтобы сдвинуть с места второе тело, первое должно приблизиться к нему до такого расстояния r, при котором сила трения покоя достигнет максимального значения и будет справедливо равенство

$$\frac{kq^2}{r^2} = \mu mg .$$

Отсюда найдем

$$r = 6 \text{ м}.$$

При минимальной начальной скорости первого тела оно остановится в момент начала скольжения второго тела. Закон сохранения энергии с учетом выделения тепла (увеличения внутренней энергии) имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kq^2}{r_0} = \frac{kq^2}{r} + \mu mg\left(r_0 - r\right).$$

Выразим kq^2 из предыдущего уравнения и получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu g\left(r_0^2 - r^2\right)}{r_0}} = 8 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче во внутреннюю энергию переходит часть электростатической энергии конденсатора за счет нагревания проводов при протекании по ним тока перезарядки.

Задача 12. *Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ, заряженный до напряжения $U_1 = 200$ В, соединяют параллельно с незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 15$ мкФ. Какое количество теплоты выделится при этом?*

Решение. Для вычисления количества джоулева тепла (увеличения внутренней энергии проводов) нам не надо знать ни значений сопротивлений проводов, ни того, какие токи протекают по ним при перезарядке. Достаточно записать закон сохранения энергии

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + 0 = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + Q$$

и найти конечное напряжение из закона сохранения заряда

$$C_1U_1 + 0 = (C_1 + C_2)U .$$

После преобразований получим

$$Q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{U_1^2}{2} = 0{,}12 \text{ Дж}.$$

Отметим математическое сходство с законами сохранения энергии и импульса при неупругом ударе.

Теперь перейдем к задачам, где в изменении энергии системы принимают участие внешние силы.

Задача 13. *На гладком полу лежит брусок массой $m = 100$ г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость $k = 250$ Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила $F = 4$ Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную скорость бруска.*

Решение. Запишем формулу (1) для изменения энергии системы под действием внешних сил:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) - 0 = Fx .$$

Нам надо найти момент, когда скорость, а значит, и кинетическая энергия

$$\frac{mv^2}{2} = Fx - \frac{kx^2}{2}$$

максимальны. Можно формально математически найти максимум выражения в правой части и вычислить максимальную скорость, но мы сделаем это из физических соображений. Искомая скорость является максимумом не только функции $v(x)$, но и функции $v(t)$, а это означает, что ускорение бруска в интересующий нас момент равно нулю. Второй закон Ньютона для этого момента имеет вид

$$F - kx = 0 ,$$

т.е. максимум скорости достигается при $x = F/k$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, найдем

$$v = \frac{F}{\sqrt{mk}} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Задача 14. *На пружине жесткостью $k = 50$ Н/м к потолку подвешен груз массой $m = 0{,}5$ кг. На груз начинает действовать постоянная сила $F = 10$ Н, направленная вертикально вниз. Найдите максимальную скорость груза.*

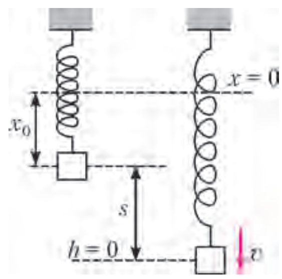


Рис. 2

Решение. Уравнение (1) в данном случае принимает следующий вид (рис.2):

$$\left(\frac{k\left(x_0 + s\right)^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) - \left(\frac{kx_0^2}{2} + mgs\right) = Fs .$$

Здесь s – расстояние, пройденное грузом, x_0 – начальная деформация пружины, которую можно выразить из условия равновесия груза в исходном положении

$$mg - kx_0 = 0 ,$$

а потенциальная энергия тяготения отсчитывается от конечного состояния. После преобразований и подстановки x_0 закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{ks^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = Fs .$$

Видим, что закон сохранения энергии выглядит так же, как в предыдущей задаче. Уравнение для состояния максимальной скорости (условие равенства нулю ускорения)

$$F + mg - k\left(x_0 + s\right) = 0$$

после подстановки x_0 тоже приобретает такой же вид, как в задаче 13:

$$F - ks = 0 .$$

Естественно, таким же получается и ответ:

$$v = \frac{F}{\sqrt{mk}} = 2 \text{ м/с}.$$

Чем же объяснить исчезновение силы тяжести из конечных уравнений? Если сразу рассмотреть равнодействующую сил тяжести и упругости

$$F_{\text{р}} = mg - k\left(x_0 + s\right) = -ks ,$$

то она окажется эквивалентной одной силе упругости, но отсчитываемой от положения равновесия (где $F_{\text{р}} = 0$). Соответственно, и полная потенциальная энергия двух сил может быть записана в виде $E_{\text{п}} = ks^2/2$.

Задача 15. *Брусок массой $m = 1$ кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α ($\sin\alpha = 0{,}6$). Брусок соединен с вершиной наклонной плоскости недеформированной пружиной жесткостью $k = 4$ Н/м. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}8$. На брусок начинает действовать постоянная сила $F = 2$ Н, направленная вниз вдоль плоскости. Найдите расстояние, пройденное бруском до остановки.*

Решение. Запишем формулу (1) для данного случая:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}} ,$$

или, если учесть связь (2) работы силы трения с приращением внутренней энергии:

$$\left(E_{\text{мех}2}+Q\right)-E_{\text{мех}1}=A_{\text{внеш}}.$$

Поскольку такая замена не меняет кардинально форму записи, как это было в задачах 1 – 12, обычно используют первый вариант. (Второй вариант окажется полезным в задачах с электрическим током.) Получаем

$$\frac{ks^2}{2}-mgs\sin\alpha=Fs-(\mu mg\cos\alpha)s,$$

где за ноль потенциальной энергии тяготения принято конечное положение бруска. Отсюда находим

$$s=\frac{2(F+mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha)}{k}=0{,}8\text{ м}.$$

Задача 16. *Ящик массой $m=50$ кг за веревку, направленную вдоль наклонного помоста, медленно втащили наверх. При этом была совершена работа $A=10{,}5$ кДж. В верхней точке помоста веревка обрывается, и ящик начинает скользить вниз. В нижней точке помоста его скорость составляет $v=10$ м/с. Найдите высоту помоста.*

Решение. Запишем формулу (1) как для подъема ящика, так и для обратного движения:

$$mgh-0=A+A_{\text{тр}},\quad \frac{mv^2}{2}-mgh=A_{\text{тр}}.$$

Мы учли, что поскольку сила трения при движении в обоих направлениях одинакова (она равна $\mu N=\mu mg\cos\alpha$), то и работа силы трения одинакова. Исключая $A_{\text{тр}}$, получим

$$h=\frac{A+\left(mv^2/2\right)}{2mg}=13\text{ м}.$$

Задача 17. *Шарик массой $m=5$ г с зарядом $q=2$ мКл подвешен на нити длиной $l=1$ м в горизонтальном электрическом поле с напряженностью $E=20$ В/м. Шарик сначала удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда шарик поднимется на $h=20$ см выше начального положения.*

Решение. Силу натяжения можно найти с помощью второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление, т.е. на направление нити (рис.3):

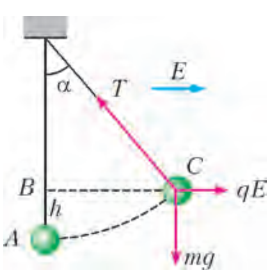


Рис. 3

$$T-mg\cos\alpha-qE\sin\alpha=\frac{mv^2}{l},$$

где

$$\cos\alpha=\frac{l-h}{l}.$$

Чтобы найти mv^2, запишем закон сохранения энергии. Удобно учесть как электрическую силу, так и силу тяжести в виде работы внешних сил:

$$\frac{mv^2}{2}-0=A_{\text{эл}}+A_{\text{тяж}}.$$

(Впрочем, с тем же успехом можно учесть силу тяжести в виде потенциальной энергии, а электрическую силу – в качестве внешней. При желании можно учесть в виде потенциальной энергии обе силы, но тогда надо внимательно следить за знаками.) Учитывая, что работа каждой из этих сил не зависит от траектории, можно вместо дуги окружности AC рассмотреть траекторию ABC, тогда сила тяжести совершает работу только на участке AB, а электрическая сила – только на участке BC:

$$A_{\text{тяж}}=-mgh,\quad A_{\text{эл}}=qE\cdot l\sin\alpha.$$

После подстановки получим

$$T=92\text{ мН}.$$

Задача 18. *Два небольших тела массой $m=50$ г каждое, заряженные одинаковым зарядом $q=10$ мкКл, находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии $r_0=10$ м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость $\mu=0{,}2$. Какую минимальную постоянную горизонтальную силу надо приложить к одному из тел, чтобы сдвинуть с места второе тело?*

Решение. Чтобы сдвинуть с места второе тело, первое должно приблизиться к нему до такого расстояния r, при котором сила трения покоя достигнет максимального значения (см. задачи 5, 11):

$$\frac{kq^2}{r^2}=\mu m_2 g,$$

откуда находим

$$r=3\text{ м}.$$

Если приложенная к первому телу сила F минимальна, то это тело остановится в тот момент, когда второе тело будет на грани скольжения. Следовательно, формула (1) для данной задачи имеет вид

$$F\left(r_0-r\right)-\mu m g_1\left(r_0-r\right)=\frac{kq^2}{r}-\frac{kq^2}{r_0}.$$

После упрощения получим

$$F-\mu m_1 g=\frac{kq^2}{rr_0},$$

или, с учетом первого уравнения,

$$F=\mu m_1 g+\mu m_2 g\frac{r}{r_0}=\mu mg\left(1+\frac{r}{r_0}\right)=0{,}13\text{ Н}.$$

Задача 19. *Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины $C=2$ мкФ. Конденсатор зарядили от источника напряжения с ЭДС $\mathscr{E}=1000$ В, после чего отключили от источника. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость пластины $\varepsilon=2$.*

Решение. В данном случае механическая работа внешних сил идет на увеличение электрической энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}}=\frac{C_2U_2^2}{2}-\frac{C_1U_1^2}{2}.$$

Здесь известны

$$C_2=C,\ C_1=\varepsilon C,\ U_1=\mathscr{E},$$

а неизвестное напряжение U_2 найдем из условия сохранения заряда конденсатора $C_2U_2=C_1U_1$, откуда

$$U_2=\varepsilon U_1=\varepsilon\mathscr{E}.$$

Получаем

$$A_{\text{мех}}=\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)C\mathscr{E}^2}{2}=2\text{ Дж}.$$

В следующих задачах в процессе перезарядки источник остается подключенным к системе, через него проходит некоторый заряд, и сторонние силы источника совершают работу

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E},$$

где Δq – заряд, прошедший через источник в направлении сторонних сил (от отрицательной обкладки к положительной). Удобно отнести эту работу к работе внешних сил, хотя в случае гальванического элемента, например, происходит преобразование внутренней химической энергии элемента в работу электрического тока.

Задача 20. *Конденсатор емкостью $C = 8$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 100$ В, подсоединили для подзарядки к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В. Сколько тепла выделилось при подзарядке?*

Решение. Уравнение (1) в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} + Q\right) - \frac{CU^2}{2} = A_{\text{ист}}.$$

Подставляя

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E} = (C\mathcal{E} - CU)\mathcal{E},$$

получим

$$Q = \frac{C(\mathcal{E} - U)^2}{2} = 0{,}04 \text{ Дж}.$$

Задача 21. *Конденсатор емкостью $C = 3$ мкФ присоединен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Пластины конденсатора медленно раздвигают, втрое увеличивая расстояние между ними. Какую при этом совершают работу?*

Решение. Так как пластины раздвигают очень *медленно*, ток протекает маленький, и джоулевым теплом можно пренебречь. Действительно, в закон Джоуля–Ленца входит большое время: $Q \sim I^2t$, но поскольку $I \sim q/t$, то $Q \sim q^2/t$ стремится к нулю. Закон сохранения энергии имеет вид

$$A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}} = \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2}.$$

Подставляя

$$C_1 = C,\quad C_2 = \frac{C}{3},\quad A_{\text{ист}} = (C_2\mathcal{E} - C_1\mathcal{E})\mathcal{E},$$

получим

$$A_{\text{мех}} = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{3} = 0{,}01 \text{ Дж}.$$

Задача 22. *Конденсатор емкостью $C = 3$ мкФ присоединен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Пластины конденсатора быстро раздвигают, втрое увеличивая расстояние между ними. Какую при этом совершают механическую работу, если известно, что в процессе перезарядки выделилось $Q = 4$ мДж тепла?*

Решение. В этом случае, при быстром раздвигании пластин, закон сохранения энергии имеет вид

$$\left(\frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} + Q\right) - \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = A_{\text{ист}} + A_{\text{мех}}.$$

Делая такие же подстановки, как в предыдущей задаче, получаем

$$A_{\text{мех}} = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} + Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{3} + Q = 0{,}014 \text{ Дж}.$$

Упражнения

1. Однородный стержень длиной 8 см скользит по гладкой горизонтальной поверхности параллельно своей длине и наезжает на границу, отделяющую гладкую поверхность от шероховатой, на которой коэффициент трения равен 0,2. Найдите начальную скорость стержня, если он остановился в тот момент, когда наполовину пересек границу.

2. На наклонной плоскости, синус угла наклона которой к горизонту равен 0,28, на высоте 2,1 м лежит небольшая шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскость 0,5. Какую скорость надо сообщить шайбе вниз вдоль наклонной плоскости, чтобы после абсолютно упругого удара об упор, находящийся у основания плоскости, шайба вернулась в исходную точку?

3. На гладком полу находится доска массой 1,5 кг, на которой лежит брусок массой 490 г. В брусок попадает и застревает в нем пуля массой 10 г, летящая вдоль доски горизонтально со скоростью 100 м/с. На какое расстояние сместится брусок вдоль доски, если коэффициент трения между ними 0,5?

4. Граната массой 1,2 кг, летевшая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на две части. Скорость одного осколка массой 800 г равна 30 м/с и направлена под углом 60° к горизонту. Какая энергия выделилась при разрыве снаряда?

5. Спортсмен катится на роликовых коньках с ядром в руках, на ходу толкает его и в результате толчка сразу останавливается. Какую работу совершил спортсмен, если его масса 70 кг, масса ядра 10 кг, а скорость ядра равна 8 м/с и направлена под углом 30° к горизонту?

6. Два небольших тела массой 100 г каждое, несущие заряды по 10 мкКл, удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии 1 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость 0,1. Тела одновременно освобождают. Найдите максимальную скорость тел в процессе движения.

7. Обкладки конденсатора емкостью 30 мкФ, заряженного до напряжения 200 В, соединяют с противоположно заряженными обкладками конденсатора емкостью 10 мкФ, заряженного до напряжения 400 В. Какое количество теплоты выделяется при этом?

8. На полу лежит брусок массой 250 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 100 Н/м, коэффициент трения бруска о пол 0,4. На брусок начинает действовать постоянная сила 3 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную скорость бруска.

9. На гладкой наклонной плоскости лежит брусок, соединенный с вершиной плоскости пружиной жесткостью 100 Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила 12 Н, направленная вниз вдоль плоскости. Найдите максимальное смещение бруска.

10. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 1 кг и 4 кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую горизонтальную постоянную силу нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость 0,2.

11. Плоский конденсатор содержит стеклянную пластину, полностью заполняющую пространство между обкладками. Его заряжают до напряжения 100 В и отключают от источника. Затем одну из обкладок медленно отодвигают, втрое увеличивая расстояние между обкладками. Какую при этом совершают работу? Начальная емкость конденсатора 8 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 1,5.

12. Конденсаторы емкостями 3 мкФ и 1 мкФ соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 200 В. Сколько тепла выделится при пробое конденсатора меньшей емкости?

Олимпиадные задачи с целыми числами

С.КРАВЦЕВ

Нередко среди задач различных олимпиад по математике встречаются задачи об отыскании всех целочисленных или натуральных решений уравнений или систем уравнений. Умение решать такие задачи необходимо выпускникам, рассчитывающим справиться на Едином государственном экзамене по математике с наиболее сложной задачей С6. Многие из обсуждаемых ниже задач предлагались на математических олимпиадах различного уровня и в разных странах, на вступительных экзаменах в МГУ, а также в сборниках задач для подготовки к ЕГЭ.

Разложение на множители, оценки и перебор

Начнем со сравнительно простой задачи.

Задача 1. *Найдите все целочисленные решения уравнения*

$$2xy - 16 = 3x - 2y.$$

Решение. Перепишем данное уравнение так:

$$2y(x+1) - 3x = 16.$$

Вычитая 3 из левой и правой частей, получим

$$2y(x+1) - 3(x+1) = 13,$$

или

$$(x+1)(2y-3) = 13. \qquad (*)$$

В левой части стоит произведение целых чисел. Так как 13 простое число, его можно разложить на целочисленные множители четырьмя способами:

$$13 = 1\cdot 13 = (-1)\cdot(-13) = 13\cdot 1 = (-13)\cdot(-1).$$

Тем самым, имеются 4 возможности:

$$\begin{cases} x+1=1, \\ 2y-3=13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=13, \\ 2y-3=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=-1, \\ 2y-3=-13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=-13, \\ 2y-3=-1, \end{cases}$$

откуда получаем четыре решения.

Ответ. $(0;8)$, $(12;2)$, $(-2;-5)$, $(-14;1)$.

К сожалению, приведенное решение обладает одним недостатком: в нем использован искусственный прием (тот самый шаг, который обеспечил возможность разложения $(*)$).

Можно было бы поступить иначе. Выражая из исходного уравнения y через x, получим

$$y = \frac{3x+16}{2(x+1)} = \frac{3}{2} + \frac{13}{2(x+1)} \qquad (**)$$

(делим с остатком числитель на знаменатель). Теперь видим, что число $x+1$ обязано быть делителем числа 13. Имеем четыре возможности: $x+1=-1$, $x+1=-13$, $x+1=1$, $x+1=13$. Подставляя полученные значения x в $(**)$, получаем ответ.

В принципе, так можно решить любое уравнение вида $axy + bx + cy = d$, где $a \neq 0$, b, c, d – целые числа, причем $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

Упражнения

1. Докажите, что всякое уравнение вида $axy + bx + cy = d$, где $a \neq 0$, b, c, d – целые числа, причем $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ имеет конечное число решений в целых числах.

2. Решите в целых числах уравнения:

а) $xy - 2x - y - 3 = 0$; б) $xy - 2x + 3y = 5$;

в) $x^2 - xy - 2x + 3y = 10$;

г) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{239}$ (решите в натуральных числах).

д) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ имеет только три решения в натуральных числах?

3. При каких целых значениях n будет целым числом: а) $\frac{n^3+3}{n+1}$; б) $\frac{n^5+3}{n^2+1}$?

Решение следующей задачи доставляется с помощью разумно подобранных оценок.

Задача 2. *Решите в целых числах уравнение*

$$3y^6 + 2x^4 - 6y^3 + 8x^2 - 10 = 0.$$

Решение. После группировки слагаемых

$$3\left(y^6 - 2y^3\right) + 2\left(x^4 + 4x^2\right) - 10 = 0$$

дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$3\left(y^6 - 2y^3 + 1 - 1\right) + 2\left(x^4 + 4x^2 + 4 - 4\right) - 10.$$

Теперь уравнение приводится к виду

$$3\left(y^3 - 1\right)^2 + 2\left(x^2 + 2\right)^2 = 21.$$

Второе слагаемое не меньше 8, поэтому $3\left(y^3-1\right)^2 \le 13$, откуда $\left(y^3-1\right)^2 \le 4$, т.е. $\left|y^3-1\right| \le 2$.

Последнему неравенству удовлетворяют три целых числа: -1, 0, 1. Подставляя эти значения в исходное уравнение, находим все решения.

Ответ. $(-1;0)$, $(1;0)$.

Упражнения

4. Решите в целых числах уравнение

$$5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

5. При каких натуральных n число: а) $n^4 + n^2 + 1$; б) $n^4 + 4^n$ является простым?

В следующей задаче сочетаются соображения делимости с разложением на множители.

Задача 3. *Решите в целых числах уравнение*

$$2^x + 1 = y^2.$$

Решение. Прежде всего заметим, что $x \ge 0$ (иначе левая часть – не целое число). Так как $2^x = (y-1)(y+1)$, то числа $y-1$ и $y+1$ – степени двойки, т.е. $y - 1 = 2^m$, $y + 1 = 2^n$, но тогда

$$2 = (y+1) - (y-1) = 2^n - 2^m.$$

Последнее равенство возможно лишь при $n = 2$, $m = 1$, т.е. $x = m + n = 3$, $y = \pm 3$.

Ответ. $(3;\pm 3)$.

Упражнение 6. Решите в целых числах уравнения:

а) $2^x + 1 = 3^y$; б) $3^x = y^2 + 1$; в) $3^x = y^3 + 1$.

В решении следующей задачи алгебраические преобразования сочетаются с оценками.

Задача 4. *Найдите все целые решения уравнения*

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Решение. Перемножив отдельно первую и последнюю скобки, а также две средние скобки, преобразуем уравнение к виду

$$y^2 = \left(x^2+8x\right)\left(x^2+8x+7\right) = z(z+7), \quad z = x^2+8x.$$

Заметим, что между квадратами двух соседних целых чисел $(z+3)^2$ и $(z+4)^2$ не может находиться квадрат целого числа. Поэтому рассматриваемое уравнение может иметь решение только тогда, когда выполняется хотя бы одно из неравенств $z^2+7z \le (z+3)^2$ или $z^2+7z \ge (z+4)^2$. Объединяя решения этих неравенств, приходим к выводу, что в решения уравнения могут входить только те x, для которых $x^2+8x = z < 10$, т.е. $x = -9, -8, \ldots, 1$.

Перебор указанных значений x приводит к ответу.

Ответ. $(-9;\pm12)$, $(-8;0)$, $(-7;0)$, $(-4;\pm12)$, $(-1;0)$, $(0;0)$, $(-1;\pm12)$.

Разобранный пример показывает, что для сведения решения к экономному перебору возможных решений бывает удобно использовать вид уравнения и упорядоченность целых чисел.

Упражнение 7. Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел быть квадратом целого числа?

Следующее уравнение несколько необычно – в нем неизвестные находятся и в показателе степени, и под знаком факториала.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$(x+1)^y - 1 = x!$$

в натуральных числах.

Решение. При $x = 1$ имеем $2^y = 2$, т.е. $y = 1$. При $x > 1$ перепишем уравнение в виде $(x+1)^y = x!+1$ и заметим, что если число $x + 1$ не является простым, то простые делители p этого числа будут не больше числа x, и тогда первое слагаемое суммы $x! + 1$ будет делиться на p, а второе – нет, значит, сумма в правой части уравнения $(x+1)^y = x!+1$ не будет делиться на p. Таким образом, $x = p - 1$, p – простое число.

Если число x тоже простое, то непременно $x = 2$, и тогда вновь $y = 1$.

В случае, когда число x составное, $x = ab$, где $1 < a < x$, $1 < b < x$ и $a \ne b$. Тогда $(x-1)!$ делится на x, поскольку в разложении $(x-1)! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot(x-1)$ встречаются множители и a, и b. Значит, $x!$ делится на x^2. Но тогда и левая часть уравнения должна делиться на x^2. Записав выражение $(x+1)^y$ в виде произведения y одинаковых сомножителей $(x+1)$, после раскрытия скобок мы увидим, что $(x+1)^y - 1 = x\cdot y + \ldots$, где многоточием обозначены слагаемые, содержащие неизвестное x в степенях 2 и выше. Но тогда слагаемое xy должно делиться на x^2, откуда следуют неравенства $y \ge x \Rightarrow (x+1)^y - 1 \ge (x+1)^x - 1 > x!$.

Значит, в данном случае рассматриваемое уравнение не имеет решений. Осталось рассмотреть случай $x = p^2$, p – простое число. Если $x \le 2p$, то $p = 2$, $x = 4$, $y = 2$. Если же $x > 2p$, то, рассуждая аналогично разобранному ранее случаю $x = ab$, мы вновь приходим к выводу о делимости $x!$ на x^2, что, как уже было показано, невозможно.

Ответ. $(1;1)$, $(2;1)$, $(4;2)$.

Упражнение 8. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $x! = y^2+1$.

Разберем теперь задачу с весьма громоздким условием, предлагавшуюся на вступительном экзамене на мехмат МГУ в 1990 году.

Задача 6. *Найдите все целочисленные решения неравенства*

$$\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2-9z+17.$$

Решение. Прежде всего, выражения, стоящие под знаками логарифма, должны быть положительными. Мы могли бы сразу записать систему соответствующих неравенств, но что потом делать с этой системой, неясно. Внимательно присмотревшись к выражениям в скобках, заметим, что их сумма равна 3. Однако сумма трех целых положительных чисел равна 3 лишь тогда, когда каждое из этих чисел равно 1. Итак, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y-6z+3=1,\\ 3x-5y+2z-2=1,\\ 2y+4z-5x+2=1. \end{cases}$$

Выписанные три уравнения содержат три неизвестных, но надежда однозначно решить эту систему, конечно, не оправдается, поскольку сумма выписанных уравнений превращается в тождество 3 = 3, т.е. любое из уравнений можно получить вычитанием суммы двух оставшихся из этого тождества.

Тем не менее, если подставить полученные данные в исходное неравенство, получится квадратичное неравенство $z^2-9z+17<0$, которому удовлетворяют только целые $z = 3, 4, 5$. Оставив теперь любые два из трех ранее полученных линейных уравнений и добавив к ним только что найденное условие на z, мы приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+3y-6z+3=1,\\ 3x-5y+2z-2=1,\\ z\in\{3,4,5\}. \end{cases}$$

Подставляя последовательно все указанные возможные значения z в два уравнения системы и отбрасывая нецелые значения других переменных, если таковые встречаются, мы получаем ответ.

Ответ. $(5;4;4)$.

Упражнение 9. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{2x-y-3} + \sqrt{2y-x+3} = 2\sqrt{3-x-y}.$$

При решении уравнений в целых числах иногда удается использовать метод, называемый «методом бесконечного спуска». Сразу поясним суть этого метода: если, используя особенности выражений и числовых коэффициентов, составляющих уравнение, удается доказать, что все его целые решения должны бесконечно много раз делиться на некоторое натуральное число n, то этими решениями могут быть только нули. Разберем соответствующий пример.

Задача 7. *Найдите все целые решения уравнения*

$$x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0.$$

Решение. Переписав исходное уравнение в виде $x^3 = 3\left(y^3+3z^3-3xyz\right)$ и подставив в него целочисленное решение $(x_0;y_0;z_0)$, получим верное числовое равенство $x_0^3 = 3\left(y_0^3+3z_0^3-3x_0y_0z_0\right)$, из которого следует, что число x_0 делится на 3, т.е. $x_0 = 3x_1$, $x_1\in\mathbb{Z}$. Но тогда $27x_1^3 = 3\left(y_0^3+3z_0^3-9x_0y_0z_0\right)$, поэтому $y_0^3 = 3\left(3x_1^3 - z_0^3 - 3x_1y_0z_0\right)$. Значит, $y_0 = 3y_1$, $y_1\in\mathbb{Z}$. Вновь подставляя полученный результат в последнее равенство, видим, что $z_0^3 = 3\left(x_1^3-3y_1^3+3x_1y_1z_0\right)$, т.е. $z_0 = 3z_1$, $z_1\in\mathbb{Z}$. Таким образом, каждая из компонент решения $(x_0;y_0;z_0)$ обязательно делится на 3. Подставив в уравнение вместо $(x_0;y_0;z_0)$

тройку $(3x_1; 3y_1; 3z_1)$, после сокращения всех его членов на 27 мы придем к тому же уравнению, которому теперь удовлетворяет целочисленная тройка $(x_1; y_1; z_1)$. Рассуждая точно так же, мы будем должны согласиться, что каждое из чисел тройки $(x_1; y_1; z_1)$ делится на 3, и т.д. Поэтому единственным решением исходного уравнения является тройка $(0; 0; 0)$.

Ответ. $(0; 0; 0)$.

Упражнение 10. Решите в целых числах уравнение $p^2 - 4q^2 = 4pq$.

Теперь разберем довольно трудную задачу.

Задача 8. *Вовочка написал на доске равенство 101 = = 11011. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.*

Решение. Пусть $m \geq 2$ и $n \geq 2$ – искомые основания систем счисления. Теперь выписанное Вовочкой равенство можно переписать в виде уравнения $m^2 + 1 = n^4 + n^3 + n + 1$, или $m^2 = n^4 + n^3 + n$.

Заметим, что

$$\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4} > n^4 + n^3 + n \text{ при всех } n > 4$$

и

$$\left(n^2 + \frac{n}{2} - 1\right)^2 = n^4 + n^3 - \frac{7n^2}{4} - n + 1 < n^4 + n^3 + n$$

при всех натуральных n.

Итак, если $n > 4$, то

$$\left(n^2 + \frac{n}{2} - 1\right)^2 < m^2 < \left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2, \text{ или } n^2 + \frac{n}{2} - 1 < m < n^2 + \frac{n}{2}.$$

Если n – четное число, то натуральное число m оказывается между двумя соседними натуральными числами, чего не может быть. Значит, n нечетно, а $m = n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$. Но тогда

$$\left(n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + n, \text{ т.е. } 3n^2 + 3n - 1 = 0.$$

Полученное уравнение не имеет натуральных решений, поэтому остается рассмотреть случаи n = 1, 2, 3, 4, откуда получается ответ.

Ответ. $(11; 3)$, $(18; 4)$.

Важно отметить, что уравнения в целых числах при решении олимпиадных и экзаменационных задач иногда возникают довольно неожиданно. Так, составители время от времени ловко маскируют сущность задачи, например, предлагая задачу с текстовым условием, при обработке которого и возникают уравнения в целых числах. Рассмотрим соответствующий пример.

Задача 9. *За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5% в месяц, затем по 12%, потом по $11\frac{1}{9}$% и, наконец, по 12,5% в месяц, причем каждая процентная ставка начислялась целое число месяцев, а когда вклад забрали, то он вырос на $104\frac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.*

Решение. Обозначим через k, l, m, n число месяцев, соответствующих последовательным процентным ставкам. Пользуясь формулой начисления сложных процентов и предполагая, что первоначально в банк было внесено S единиц денег, приходим к уравнению

$$\left(\frac{21}{20}\right)^k \left(\frac{28}{25}\right)^l \left(\frac{10}{9}\right)^m \left(\frac{9}{8}\right)^n \cdot S = \frac{49}{24} S,$$

или

$$\frac{3^k \cdot 7^k \cdot 2^{2l} \cdot 7^l \cdot 2^m \cdot 5^m \cdot 3^{2n}}{2^{2k} \cdot 5^k \cdot 5^{2l} \cdot 3^{2m} \cdot 2^{3n}} = \frac{7^2}{2^3 \cdot 3}.$$

Пользуясь правилом пропорции (т.е., попросту говоря, «перемножая крест-накрест»), приходим к уравнению

$$2^{2l+m+3} \cdot 3^{k+2n+1} \cdot 5^m \cdot 7^{k+l} = 2^{2k+3n} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{k+2l} \cdot 7^2.$$

Ужасает, что в полученном уравнении четыре неизвестных. Но ужас быстро проходит, если вспомнить основную теорему арифметики, которая гласит: *каждое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения натуральных степеней простых чисел, если не учитывать порядок выписывания сомножителей*. В левой и правой частях последнего уравнения выписаны два разложения одного и того же натурального числа в виде натуральных степеней простых чисел 2, 3, 5 и 7. Поэтому нужно приравнять степени этих сомножителей, возникшие в левой и правой частях уравнения, что даст как раз четыре линейных уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2l + m + 3 = 2k + 3n, \\ k + 2n + 1 = 2m, \\ m = k + 2l, \\ k + l = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения сразу видно, что $k = l = 1$, после чего из третьего уравнения находится $m = 3$, а из второго уравнения $n = 2$.

Осталось убедиться, что найденные значения неизвестных удовлетворяют пока еще не использованному первому уравнению системы и получить ответ.

Ответ. $k + l + m + n = 7$.

Перед тем как перейти к следующей части статьи, хочется отметить, что сведением к конечному перебору можно успешно решать не только уравнения, но и неравенства, в которых требуется отыскать целые или натуральные решения. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача 10. *Найдите все целые решения системы неравенств*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

Решение. Перенесем в каждом из неравенств все его члены в левую часть и выделим полные квадраты относительно каждой из переменных m, n. Получится система неравенств

$$\begin{cases} (m-8)^2 + (n+11)^2 < 14, \\ (m-15)^2 + (n+7)^2 < 22. \end{cases}$$

Каждое из слагаемых слева в этих неравенствах неотрицательно, поэтому каждое из них должно быть меньше числа в правой части соответствующего неравенства. В частности, $|m-8| \leq 3$ и $|m-15| \leq 4$, откуда $m = 11$. Подставляя найденное значение m в последнюю систему неравенств, получаем новые ограничения, из которых следует, что $n = -9$.

Ответ. $(11; -9)$.

Сравнения по модулю

При решении уравнений в целых или натуральных числах помимо сведения этого уравнения к прямому перебору делителей некоторого целого числа бывает полезно использовать набор остатков от деления на заранее выбранное натуральное число n. Напомним читателям относящиеся сюда понятия.

Если m – целое и $n > 1$ – натуральное число, то существуют единственные целые числа k и $0 \leq l \leq (n-1)$, для которых выполняется равенство $m = kn + l$, и число l в этом равенстве называется остатком от деления m на n. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю натурального числа* $n > 1$ – обозначают как $a \equiv b \pmod{n}$, – если при делении на n они дают одинаковые остатки. Если все сравнимые между собой целые числа объединить в одну группу, то получится n таких групп, соответствующих остаткам 0, 1, 2, …, $n - 1$. Перечислим несколько простейших свойств сравнений, которые следуют непосредственно из определения сравнимости и полезны при решении задач.

1. Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{n}$, $a - c \equiv b - d \pmod{n}$, $ac \equiv bd \pmod{n}$. Тем самым, сравнимость чисел не нарушится, если к одному из них прибавить число, сравнимое с 0 по заданному модулю, если оба сравнимых числа умножить на одно и то же целое число или возвести их в одинаковую натуральную степень. Доказательства этих свойств вытекают из равенств

$$(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c),$$

$$(b - d) - (a - c) = (b - a) - (d - c),$$

$$b \cdot d - a \cdot c = (b - a)d + (d - c)a.$$

2. Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $P(x)$ – произвольный многочлен с целыми коэффициентами, то $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$. Это утверждение сразу же следует из свойств сравнений, перечисленных в предыдущем пункте.

3. Если m, $n > 1$ – натуральные числа, то при $m > n$ число $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \equiv 0 \pmod{n}$. Это утверждение очевидно.

4. Всякое простое число $p > 6$ сравнимо только с 1 или 5 по модулю 6. Чтобы доказать это утверждение, достаточно записать $p = 6k + l$ и заметить, что при $l = 0$, 2, 3, 4 число p оказывается разложимым в произведение двух натуральных сомножителей, каждый из которых больше 1.

В олимпиадах нередко встречаются задания решить в целых числах уравнение степени выше первой. Поэтому полезно собрать некоторые сведения о сравнимости степеней целых чисел. Сразу же отметим, что вопрос этот весьма непрост, поэтому мы ограничимся лишь некоторыми наблюдениями, несложные доказательства которых предложим читателям найти самостоятельно. Для этого достаточно последовательно выписать разложения произвольного целого числа в виде суммы числа, кратного модулю, и всевозможных остатков, возвести такую сумму в рассматриваемую степень и рассмотреть полученные результаты.

В частности, квадрат натурального числа может быть сравним только с 0 или 1 по модулю 3; квадрат натурального числа может быть сравним только с 0, 1 или 4 по модулю 5; куб целого числа может быть сравним только с 0, 1 или 6 по модулю 7 и только с 0, 1 или 8 по модулю 9.

Кроме того, если обе части уравнения, решаемого в целых или натуральных числах, являются целыми числами при всех целых (натуральных) значениях неизвестных, то обе эти части должны быть сравнимы по любому натуральному модулю. Удачный выбор модуля нередко помогает доказать несравнимость правой и левой частей уравнения и тем самым отсутствие у него целых (натуральных) решений. Выбор такого модуля не всегда очевиден, и умение правильно выбрать модуль приходит с опытом.

Теперь разберем несколько примеров.

Задача 11. *Докажите, что уравнение* $m^2 - 5n^2 = 18$ *не имеет целых решений.*

Решение. Поскольку $18 \equiv 3 \pmod{5}$, число $m^2 = 5n^2 + 18$ должно быть сравнимо с 3 по модулю 5, а это, как указано выше, невозможно. Мы видим, что успеху в решении способствовал удачно выбранный модуль сравнения.

Задача 12. *Докажите, что уравнение* $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$ *не имеет целых решений.*

Решение. Будем сравнивать левую и правую части уравнения по модулю числа 9. Так как $1969 = 218 \cdot 9 + 7$, то $1969^2 \equiv 4 \pmod{9}$. С другой стороны, всевозможные комбинации возможных остатков 0, 1 и 8 слагаемых в левой части уравнения дают все возможные остатки от деления левой части уравнения на 9, среди которых нет числа 4.

Задача 13. *Найдите все целые решения уравнения* $x^3 + y^3 = 4\left(x^2y + xy^2 + 1\right)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(x + y)^3 = 7\left(x^2y + xy^2\right) + 4.$$

Вид правой части получившегося уравнения подсказывает, что в качестве модуля для сравнения левой и правой частей удобно взять число 7, так что $(x + y)^3 \equiv 4 \pmod{7}$, а это невозможно.

Ответ. Целых решений нет.

Упражнение 11. Решите в целых числах уравнения:
а) $x^2 = 3y^2 + 2$; б) $x^2 = 5y^2 + 3$; в) $9^x = 12y + 1$;
г) $3^m - 2^n = 5$.

Задача 14. *Решите уравнение* $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$ *в целых числах.*

Решение. Если число x нечетно, то $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$, иначе $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$. Левая часть не может содержать больше 14 нечетных чисел, но $1599 \equiv 15 \pmod{16}$, поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ. Целых решений нет.

Упражнение 12. Можно ли число 2014 представить в виде суммы: а) семи; б) шести квадратов нечетных чисел?

Наконец, рассмотрим задачу, которая встречается в многих сборниках тренировочных задач для подготовки к ЕГЭ по математике.

Задача 15. *Решите в натуральных числах уравнение* $3^a + 4^b = 5^c$.

Решение. Сначала заметим, что $5^c \equiv 1 \pmod{4}$, $4^b \equiv 0 \pmod{4}$, поэтому 3^a также должно быть сравнимо с 1 по модулю 4, откуда следует, что $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Затем сравним обе части по модулю 3. Левая часть всегда сравнима по этому модулю с 1, а правая сравнима с 1 по модулю 3 только при $c = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Теперь уравнение можно переписать в виде $3^{2k} = \left(5^l\right)^2 - \left(2^b\right)^2$, или $3^{2k} = \left(5^l - 2^b\right)\left(5^l + 2^b\right)$. Но тогда $5^l - 2^b = 3^m$, $5^l + 2^b = 3^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Более того, поскольку $\left(5^l + 2^b\right) - \left(5^l - 2^b\right) = 2^{b+1} = 3^n - 3^m$ не делится на 3, то непременно $m = 0$, и тогда $5^l - 2^b = 1$, $5^l + 2^b = 3^{2k}$. Подставляя в последнее уравнение $5^l = 2^b + 1$, получаем уравнение $2^{b+1} = 3^{2k} - 1$, или $2^{b+1} = \left(3^k - 1\right)\left(3^k + 1\right)$. Таким образом, оба сомножителя в правой части последнего уравнения являются неотрицательными целыми степенями двойки, причем разность большего и меньшего сомножителей равна 2. Такое выполняется только в случае, когда $3^k - 1 = 2$, $3^k + 1 = 4$, откуда следует ответ.

Ответ. $(2; 2; 2)$.

Упражнение 13. а) Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c – целые числа), то abc делится на 60.

б) Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^x + 4^x = y^2$.

в) При каких натуральных n является простым число $2^n + n^2$?

В заключение предлагаем читателям попробовать свои силы в решении задач с целыми числами.

Упражнения

Решите в натуральных числах следующие уравнения.

14. $x^y = y^x$, $x \neq y$. **15.** $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \dfrac{30}{13}$. **16.** $\begin{cases} mn + kl = 13, \\ nk - ml = 6. \end{cases}$

Решите следующие уравнения в целых числах.

17. $5y = 2x^2 - 7x + 3$. **18.** $3xy - 14x - 17y + 71 = 0$.

19. $6m^2 - 2n^2 + mn = 3$. **20.** $m^2 + 1953^{100}mn - 1995n^2 = 0$.

21. $\left(x^2 + y^2\right)(x + y - 3) = 2xy$.

22. $x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0$.

23. $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$.

24. $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0$.

25. $\dfrac{5n^2 + 4n + 13}{n + 1} = 11 - 8\sqrt{1 - 8n}$.

26. $\left(\dfrac{45}{8}\right)^{x^3 - 4x^2 + 2y + 6} = \left(\dfrac{162}{5}\right)^{y^3 - 4y^2 + 2x - 1}$.

27. Найдите все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq -25, \\ x^2 - y \leq 8, \\ 4x + y \leq 1. \end{cases}$$

28. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

29. Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причем каждый день производилось одинаковое число деталей. Когда треть продукции одного дня упаковали в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причем число ящиков совпало с числом дней работы цеха. После отсылки половины всех сделанных деталей заказчикам (каждому заказчику послали одинаковое число деталей) выяснилось, что куб числа заказчиков равен числу деталей, высланных одному заказчику. Какое минимальное число деталей мог изготовить цех?

ЛЮБОПЫТНО, ЧТО

Математика + программирование = Computer Science

А.ШЕНЬ

Иногда математики относятся к программированию как к чему-то второсортному, где особо думать не надо, а нужно «писать код», по возможности быстро и без раздумий. Программисты тоже не остаются в долгу и раздраженно отвечают, что все эти точные определения и строгие доказательства, которыми так гордятся математики, в реальной жизни бесполезны.

На самом деле неправы и те и другие: математика и программирование тесно связаны. Взаимная польза тут есть и на уровне результатов, и на уровне навыков. На уровне результатов, наверное, самый известный пример – это возможность проверки простоты больших чисел и невозможность разложения на множители.

Пусть кто-то дал нам натуральное число N, скажем, из тысячи знаков. Как узнать, простое оно или разлагается на множители (может быть представлено в виде произведения меньших чисел)? Простейший способ, который сразу приходит в голову, – проверять, не делится ли N на 2, на 3, на 4 и так далее. Если в какой-то момент мы найдем делитель, значит, число N не простое. Если дойдем до N, так и не найдя делителя, – значит, простое.

Чистый математик этим удовлетворится: за конечное число шагов мы сможем проверить простоту (как говорят, свойство быть простым числом *алгоритмически разрешимо*). Но если представить себе, сколько времени потребуется, чтобы досчитать до тысячезначного числа (как минимум 10^{1000} шагов), станет ясно, что мы до этого не доживем, даже используя самые быстрые современные компьютеры и даже поделив работу между ними.

Можно заметить, правда, что не обязательно считать до конца: если мы ищем делители числа N и дошли до $\sqrt{N}$, не найдя делителя, то их и не будет (если $N = uv$, то хотя бы один из двух делителей u и v не больше $\sqrt{N}$). Это позволяет заменить 10^{1000} на 10^{500} – но по-прежнему конец света наступит раньше. Нет ли какого-то более быстрого способа?

Нам поможет утверждение элементарной теории чисел, которое называется *малой теоремой Ферма*: если число N простое, то для любого a в интервале от 1 до $N - 1$ выполняется равенство

$$a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}.$$

Эта запись читается как «a^{N-1} сравнимо с 1 по модулю N» и означает, что эти два числа дают одинаковый остаток при делении на N (другими словами, их разность делится на N).

Проверим при $a = 2$ и $N = 7$: тогда $2^{7-1} = 2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$ и действительно дает остаток 1 при делении на 7.

Можно сказать и иначе: если $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$, то N не простое. Например, $2^{15-1} = 2^{14} = 16384 = 1092 \cdot 15 + 4$ дает остаток 4 при делении на 15, и отсюда можно заключить, что 15 – не простое число (если бы мы этого и так не знали). Говорят, что число 2 в этом примере является *свидетелем* того, что 15 – не простое число.

Это наводит на такую мысль: если надо проверить, простое N или нет, можно не пробовать разные делители, а пробовать разные a и выяснять, выполняется ли равенство $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$. Если окажется, что нет, то Ферма гарантирует нам, что N не простое.

Ну хорошо, скажет скептик, вы изменили понятие свидетеля: теперь свидетелями непростоты считаются не делители, а числа a, для которых не выполнено утверждение малой теоремы Ферма. Но что мы при этом выиграли? Казалось бы, мы только проиграли: проверить, делится ли одно тысячезначное число на другое, не так просто, но возвести число a в степень, записываемую тысячезначным числом, уж совсем нереально – возведение в степень это повторное умножение, и если мы будем каждый раз умножать на a, число действий будет тысячезначным (а результат будет содержать астрономическое число цифр).

На самом деле все не так страшно, как кажется. Поскольку нас интересует лишь остаток при делении на N, нам не обязательно хранить очень большие числа, достаточно после каждого умножения делить результат на N и брать остаток (числа, дающие одинаковый остаток, взаимозаменяемы). А остаток в худшем случае содержит примерно столько же цифр, сколько и N, в нашем примере тысячу, что не так страшно.

Но есть другая проблема: как вычислить a^N, если N – тысячезначное число? Секрет тут в том, что не обязательно N раз умножать на a. Вместо этого мы можем возводить число в квадрат, вычисляя последовательно $a^2, a^4, a^8, a^{16}, a^{32}, \ldots, a^{2^k}, \ldots$

Теперь, выбирая некоторые результаты и перемножая их, мы можем получить любую степень. Это соответствует двоичному разложению: скажем, 27 = 16 + 8 + 2 + 1 (и записывается в двоичной системе как 11011_2, поэтому a^{27} можно вычислить как произведение a^{16}, a^8, a^2 и $a^1 = a$, которые мы уже вычислили возведением в квадрат.

Используя эти два наблюдения, вполне реально вычислить остаток от деления a^{N-1} на N и тем самым проверить утверждение малой теоремы Ферма для a и N. Если результат будет не 1, то a – свидетель непростоты числа N.

Вопрос, однако, остается: чем такие свидетели лучше, чем делители? А вот чем: если число N не простое, то у него есть делители, но их мало по сравнению с N (скажем, если N есть произведение двух больших простых чисел p и q, то делителей только два – эти самые p и q). А свидетелей в нашем смысле обычно много (как правило, больше половины всех вариантов от 1 до $N-1$). Поэтому, если просто попробовать случайно взятое число a от 1 до $N-1$, то у нас есть шанс (как правило, не меньше 50%) наткнуться на такого свидетеля. Конечно, 50% не так много, но можно сделать несколько проб: если каждый раз шансы на удачу 50% или больше, то можно быть практически уверенным, что раз за 20 – 30 мы этот шанс реализуем. На практике дела обстоят даже лучше, чем в теории: скажем, число $a = 2$ годится как свидетель для большинства составных чисел (и для всех меньших 341, где первый раз $a = 2$ не срабатывает).

Получаем такой *вероятностный алгоритм проверки на простоту*: надо несколько десятков раз проверить утверждение малой теоремы Ферма для случайно выбранных a. Если хоть раз оно не выполнится, то мы с уверенностью говорим, что число составное, а если все разы выполнится, то говорим, что число простое. При этом возможна ошибка: составное число мы можем принять за простое, но с очень маленькой вероятностью (скажем, при 20 повторениях получается 2^{-20}, меньше одной миллионной).

На самом деле сказанное выше не совсем правда. Бывают такие зловредные числа, называемые *числами Кармайкла*, которые составные, но свидетелей у них мало, так что наш алгоритм их скорее всего объявит простыми. Первое такое число равно 561. Числа эти настолько редкие, что с практической точки зрения на это можно наплевать, но математически корректный алгоритм требует дополнения.

Вот это дополнение. Желая вычислить a^{N-1}, мы сначала выделяем из четного числа $N-1$ (мы считаем, что N нечетно, так как четные числа заведомо не простые, так что $N-1$ четно) максимальную степень двойки: $N - 1 = 2^k \cdot l$, где l нечетно. Дальше мы вычисляем $a^{N-1} = a^{2^k \cdot l}$ так: сначала вычисляем a^l, а потом его k раз возводим в квадрат. Как мы уже знаем, если после последнего возведения в квадрат получится не 1 (по модулю N), то число N не простое. Но есть и еще одна ситуация, в которой мы можем быть уверены, что N не простое: если в ходе возведения в квадрат обнаружится число, квадрат которого равен 1 по модулю N, но само число не равно ни 1, ни −1 по модулю N. (В самом деле, если $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ делится на N, но ни $x-1$, ни $x+1$ не делятся на N, то N не может быть простым: часть его делителей должна входить в $x-1$, а часть – в $x+1$.)

Если обобщить понятие свидетеля таким способом, то теперь и для чисел Кармайкла свидетелей будет больше половины, так что наш алгоритм становится корректным для всех N.

Итак, мы описали, как можно (за разумное время – современные компьютеры делают это почти мгновенно) проверить простоту больших чисел. Но, спрашивается, кому эти большие простые числа нужны, кроме фанатиков теории чисел? Оказывается, что на них основаны почти все современные практические *криптографические* алгоритмы, используемые в банках и на разных сайтах для защищенной передачи информации (скажем, персональных данных или данных кредитных карт). Мы приведем лишь самый простой модельный пример: удостоверение личности шпиона. Допустим, кто-то ждет, что к нему придет шпион от зарубежных спецслужб. Как ожидающий может убедиться, что это действительно шпион, а не сотрудник контрразведки? Для этого на сайте спецслужбы нужно для всеобщего обозрения опубликовать произведение двух больших простых чисел, выбранных спецслужбой в глубоком секрете и сообщенных только настоящему агенту. Ожидающий может убедиться, что пришедший умеет раскладывать опубликованное на сайте число на множители, и это служит доказательством, что он не самозванец. В самом деле, самозванцу пришлось бы либо как-то выкрасть эти секретные числа («против лома нет приема»), либо самому разложить число с сайта на множители. А разложение на множители, в отличие от проверки простоты, дело сложное, и на сегодняшний день разлагать тысячезначные числа на множители никто не умеет. Так что такой метод удостоверения на сегодняшний день вполне надежен. (На самом деле на практике в чистом виде он не применяется, но принцип действия тот же самый: все основано на том, что разлагать на множители сложно.)

Вопрос только в том, почему мы уверены, что разложение на множители сложно. Вдруг кто-то придумает алгоритм, позволяющий сделать это быстро, и все шпионы (и, хуже того, все банковские вклады) окажутся в опасности? Чтобы исключить эту возможность, надо бы доказать, что быстрого алгоритма разложения на множители не существует. Это утверждение (точнее, родственная проблема, которая известна обычно под кодовым названием $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$) объявлено одной из «проблем тысячелетия», за решение которых обещают миллионный приз. (Другую проблему из этой серии, так называемую *проблему Пуанкаре*, решил знаменитый русский математик Григорий Перельман – может быть, вы слышали об этой истории.)

* * *

Таким образом, обе стороны оказываются в выигрыше: программисты (и вместе с ними мы все) получают важный криптографический алгоритм, а математики получают интересную и трудную проблему.

Поводом написать эту статью было открытие в этом году факультета компьютерных наук в Высшей школе экономики (не надо пугаться слова экономика: там недавно был открыт очень хороший факультет математики и другие совсем не экономические факультеты – например, факультет филологии) совместно с компанией «Яндекс». Организаторы этого факультета надеются, что там как раз удастся сочетать качественное математическое образование с обучением программированию на реальных задачах (курс программирования готовят ведущие разработчики Яндекса). Предупреждение: поступивших ожидает большой объем самостоятельной работы (как по математике, так и по программированию), так что имейте это в виду. Информацию о приеме на новый факультет можно найти на сайте http://cs.hse.ru/

Региональный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике

Третий (региональный) этап XL Всероссийской олимпиады прошел во всех регионах нашей страны 4 и 5 февраля 2014 года. Региональный этап олимпиады призван повышать интерес к математике среди школьников, уже имеющих некоторые успехи, а также стимулировать работу в области математического образования в регионах. Последние несколько лет региональный этап является также отборочным для участия в заключительном этапе, поэтому методическая комиссия включает в вариант достаточное количество трудных идейных задач (особенно сложными оказались задачи 4, 7, 8 в каждой из параллелей 9, 10, 11 классов).

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Даны 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

Н.Агаханов

2. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

Л.Емельянов

3. Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

О.Дмитриев

4. Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще незакрашенную клетку с номером a, если для нее выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим чем a; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим чем a. При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

С.Берлов

Второй день

5. Число x таково, что среди четырех чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

Н.Агаханов

6. См. задачу М2337,а «Задачника «Кванта».

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

Г.Жуков

8. Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!}\cdot100!^{99!}$? (Напомним, что $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.)

А.Храбров

10 класс

Первый день

1. Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них – 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок – целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

Н.Агаханов, И.Богданов

2. Стозначное натуральное число n назовем *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел.

В.Сендеров

3. В языке племени АУ две буквы – «*а*» и «*у*». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причем в каждом слове не меньше одной и не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

И.Богданов

4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC – точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что $\dfrac{A_1A_2}{BC}=\dfrac{B_1B_2}{CA}=\dfrac{C_1C_2}{AB}$.

И.Богданов

Второй день

5. На доске написано уравнение $x^3+*x^2+*x+*=0$. Петя и Вася по очереди заменяют звездочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звездочек, потом Вася – любую из двух оставшихся, а затем Петя– оставшуюся звездочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

Н.Агаханов

6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S\neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

Р.Садыков

7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

С.Берлов

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку – не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

С.Берлов

11 класс

Первый день

1. Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трех углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырех углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.

И.Богданов

2. На доске написано выражение $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, где a, b, c, d, e, f – натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

Н.Агаханов

3. Все клетки квадратной таблицы $n\times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит фишку в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую фишку на какую-то клетку, либо переставить фишку из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим чем a. Каждый раз, когда фишка попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить фишку на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество фишек потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

Д.Храмцов

4. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

А.Акопян

Второй день

5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

Н.Агаханов

6. См. задачу 7 для 9 класса.

7. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку [100; 101]. При каком минимальном натуральном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

И.Богданов, К.Сухов

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гарбер, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап олимпиады Максвелла

Теоретический тур

7 класс

Задача 1. Противостояние Марса

В момент противостояния Солнце, Земля и Марс находятся на одной прямой (Земля между Солнцем и Марсом). Продолжительность земного года $T = 365$ суток, марсианского – в $k = 1{,}88$ раза больше. Считая, что планеты обращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с общим центром, лежащим в одной плоскости, найдите минимальный промежуток времени τ между двумя последовательными противостояниями. Планеты движутся в одну сторону.

В.Плис

Задача 2. На метеорологической станции

На метеорологической станции проводят измерения плотности снега в воздухе при помощи осадкомера. Осадкомер представляет собой цилиндрический сосуд с площадью дна $200\ \text{см}^2$ и высотой 40 см, куда собираются осадки. Во время измерений снежинки падали вертикально вниз со скоростью $v = 0{,}6$ м/с. За шесть часов уровень снега в осадкомере достиг $h = 15$ см, а плотность снега в сосуде составила $\rho_0 = 0{,}15\ \text{г/см}^3$. Определите, чему равна плотность снега ρ в воздухе во время снегопада, т.е. чему равна масса снега, находящегося в одном кубическом метре воздуха.

А.Воронов

Задача 3. Рыбак

Рыбак на лодке с мотором снялся с якоря, при этом случайно обронил в воду весло, и затем поплыл вверх против течения. Через 5 минут, проплыв вдоль берега 1200 м, он обнаружил пропажу весла, развернул лодку и поплыл обратно. Когда он догнал его, то заметил, что весло снесло вниз по течению на 600 м. Считайте, что скорость течения реки и скорость лодки относительно воды постоянны.

1) Через какое время t_0 после обнаружения пропажи весла рыбак подплыл к нему?

2) Какова скорость $v_р$ течения реки?

3) Какова скорость v_0 моторной лодки в стоячей воде?

В.Чивилёв

Задача 4. Шарик с гелием

Шарик накачали гелием. Масса газа составляет 20% от массы всего шарика. Через день, когда часть гелия просочилась через стенки, объем шарика уменьшился в 2 раза, а масса гелия стала составлять 10% от массы всего шарика. Определите, во сколько раз изменилась средняя плотность воздушного шарика.

А.Воронов

8 класс

Задача 1. На прогулке

См. задачу Ф2333 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Плавание наоборот

В герметичном сосуде сверху находится жидкость плотностью $\rho_0 = 800$ кг/м^3, отделенная легким подвижным поршнем от газа, находящегося внизу и имеющего давление $p = 20$ кПа (рис.1). В поршне есть круглое отверстие, в которое вставлен цилиндрический поплавок. Причем в жидкость поплавок погружен на некоторую длину h, а в газ – на длину $3h$. Площадь основания поплавка S. Поплавок может свободно скользить относительно поршня, а поршень – относительно стенок сосуда. Жидкость нигде не подтекает. Какой должна быть плотность поплавка ρ, чтобы система могла оставаться в равновесии? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

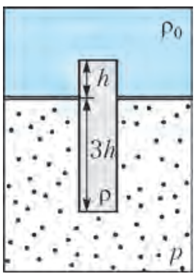


Рис. 1

М.Замятнин

Задача 3. Разные мощности

На рычаге массой $3m$ висят две льдинки (рис.2). Точка опоры делит рычаг в отношении 1:2. К короткому плечу рычага подвешена льдинка массой $4m$.

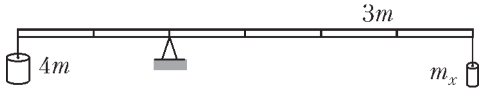


Рис. 2

1) Какую массу должна иметь льдинка, подвешенная к длинному плечу, чтобы система находилась в равновесии?

2) Льдинки одновременно начали нагревать. Во сколько раз должны отличаться мощности подводимого к льдинкам тепла, чтобы равновесие сохранилось? Льдинки находятся при температуре плавления.

М.Замятнин

Задача 4. Две детали

Теплоизолированный сосуд был до краев наполнен водой при температуре $t_0 = 19$ °С. В середину этого сосуда быстро, но аккуратно опустили деталь, изготовленную из металла плотностью $\rho_1 = 2700$ кг/м^3, нагретую до температуры $t_д = 99$ °С, и закрыли крышку. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде стала равна $t_x = 32{,}2$ °С. Затем в этот же сосуд, наполненный до краев водой при температуре $t_0 = 19$ °С, вновь быстро, но аккуратно опустили две такие же детали, нагретые до той же температуры $t_д = 99$ °С, и закрыли крышку. В этом случае после установления в сосуде теплового равновесия температура воды равна $t_y = 48{,}8$ °С. Чему равна удельная теплоемкость c_1 металла, из которого изготовлены детали? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Удельная теплоемкость воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг · °С).

С.Кармазин

Публикацию подготовили М.Замятнин, С.Козел, В.Слободянин

Региональный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Опасная затея

Доска массой m лежит, выступая на $3/7$ своей длины, на краю обрыва. Длина одной седьмой части доски $L = 1$ м. К свисающему краю доски с помощью невесомых блоков и нитей прикреплен противовес, имеющий массу $4m$ (рис.1). На каком расстоянии от края обрыва на доске может стоять человек массой $3m$, чтобы доска оставалась горизонтальной?

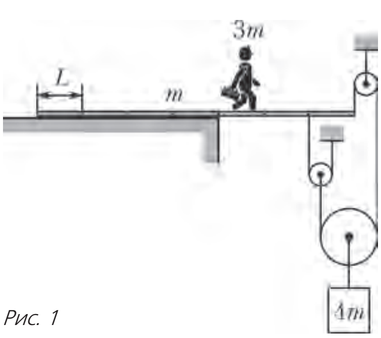


Рис. 1

М.Замятнин

Задача 2. Туда-сюда

К системе, приведенной на рисунке 2, прикладывают в указанном направлении внешние силы F_1 и F_2, графики зависимости от времени которых даны на рисунках 3 и 4

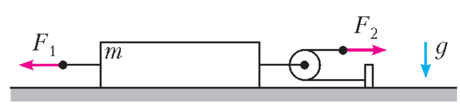


Рис. 2

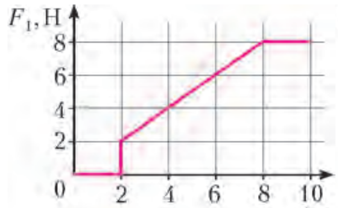


Рис. 3

Рис. 4

соответственно. Масса бруска $m = 1$ кг, коэффициент трения между плоскостью и бруском $\mu = 0{,}4$, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$. Нити легкие, нерастяжимые и длинные. Блок невесомый. На какое расстояние переместится брусок за 10 секунд, если изначально он покоится?

М.Замятнин

Задача 3. Две детали

См. задачу 4 для 8 класса Регионального этапа олимпиады Максвелла.

Задача 4. Эквивалентная схема

На рисунке 5 приведена блок-схема регулируемого источника постоянного тока. Идеальная батарея, обеспечивающая постоянное напряжение U_0, защищена от короткого замыкания резистором, сопротивление которого r. Выходное напряжение задается резистором сопротивлением R. К выходным

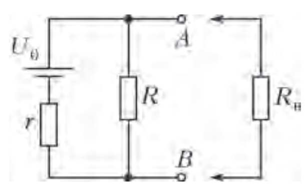


Рис. 5

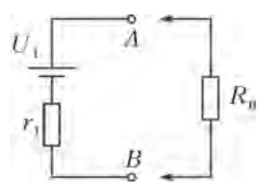


Рис. 6

разъемам A и B подключают нагрузку, сопротивление которой $R_н$. Для упрощения расчета силы тока, текущего через нагрузку, схему регулируемого источника принято представлять в виде эквивалентной схемы (рис.6), обеспечивающей такую же силу тока, текущего через нагрузку, как и реальный источник. Выразите напряжение U_1 и сопротивление r_1 эквивалентной схемы через параметры источника U_0, R и r.

Д.Александров

Задача 5. Вода и ртуть

В тонкой U-образной трубке постоянного сечения находятся вода и ртуть одинаковых объемов. Длина горизонтальной части трубки $l = 40$ см. Трубку раскрутили вокруг колена с водой, и оказалось, что уровни жидкостей в трубке одинаковы и равны $h = 25$ см (рис.7). Пренебрегая эффектом смачивания, определите период T вращения трубки. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$, плотности воды и ртути $\rho_в = 1{,}0\ \text{г/см}^3$ и $\rho_р = 13{,}5\ \text{г/см}^3$.

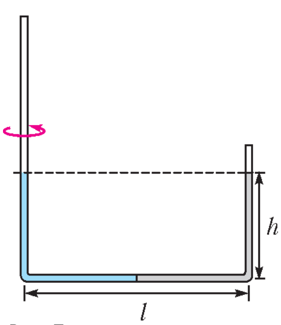


Рис. 7

И.Ерофеев

10 класс

Задача 1. Три блока

К двум легким подвижным блокам подвешены грузы, массы которых m_1 и m_2 (рис.8). Легкая нерастяжимая нить, на которой висит блок с грузом массой m_1, образует с горизонтом угол α. Грузы удерживают в равновесии. Найдите ускорение грузов сразу после того, как их освободят. Считайте, что радиусы блоков $r \ll L$.

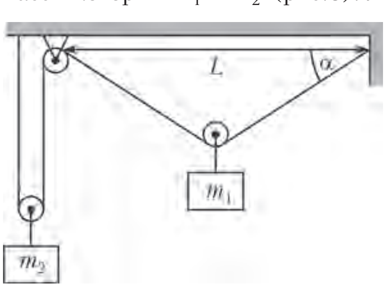


Рис. 8

Е.Савинов

Задача 2. Переменное трение

Небольшой груз соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости (рис.9). Известно, что коэффициент трения между грузом и плоскостью меняется по закону $\mu(x) = \alpha x$, где x – расстояние вдоль плоскости от начального положения груза. Опустившись на высоту H по вертикали, груз останавливается. Найдите максимальную скорость груза в процессе движения.

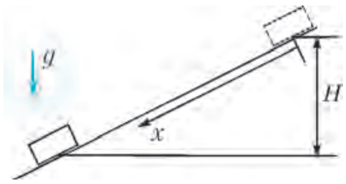


Рис. 9

Е.Савинов, В.Слободянин

Задача 3. Работа в цикле

Рабочим телом тепловой машины является идеальный одноатомный газ. Цикл состоит из изобарного расширения *1–2*, адиабатического расширения *2–3* и изотермического сжатия *3–1*. Модуль работы при изотермическом сжатии равен A_{31}. Определите, чему может быть равна работа газа при адиабатическом расширении A_{23}, если у указанного цикла КПД $\eta \le 40\%$.

А.Шеронов

Задача 4. Черный ящик

Теоретик Баг предложил экспериментатору Глюку определить схему электрического «черного ящика» (ЧЯ) с двумя выводами. В ящике находятся два одинаковых диода и два разных резистора. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) «черного ящика» приведена на рисунке 10, а ВАХ диода – на

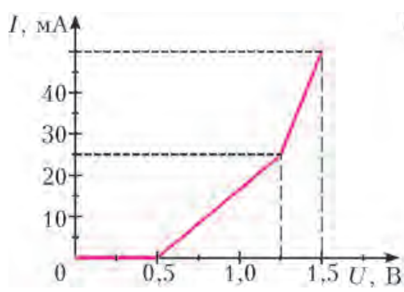


Рис. 10

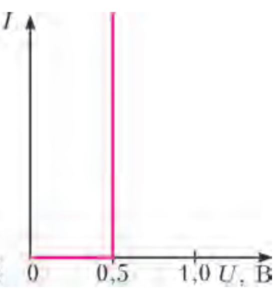


Рис. 11

рисунке 11. Восстановите схему ЧЯ и определите сопротивление каждого из резисторов.

А.Сеитов, В.Слободянин

Задача 5. Две пружины

На двух легких одинаковых пружинах, соединенных нитью AB, висит груз массой m (рис.12). Жесткость каждой пружины k. Между витками пружины протянули еще две нити: одну прикрепили к потолку и к верхнему концу B нижней пружины, а вторую – к грузу и нижнему концу A верхней пружины. Эти две нити не провисают, но и не натянуты. Нить AB перерезали. Через некоторое время система пришла к новому положению равновесия. Найдите изменение потенциальной энергии системы.

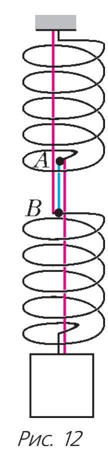


Рис. 12

А.Шень

11 класс

Задача 1. Колонна из песка

Как-то теоретик Баг, гуляя по берегу моря, увидел, как отдыхающий строит замок из песка (рис.13). Он решил узнать, какой максимальной высоты колонну можно построить из влажного песка. В одной из работ Леонарда Эйлера он обнаружил, что максимальная высота цилиндрической

Рис. 13

колонны, изготовленной из однородного и изотропного материала, может быть рассчитана по формуле $H = 1{,}25E^{\alpha}R^{\beta}\rho^{\gamma}g^{\lambda}$, где α, β, γ и λ – некоторые числовые коэффициенты, R – радиус колонны, ρ – плотность материала, из которого она изготовлена, g – ускорение свободного падения, E – модуль Юнга. Баг рассчитал, что если колонну сделать из влажного песка, то при ее радиусе $R_1 = 5$ см высота колонны окажется 1,0 м. Друг Бага, экспериментатор Глюк, решил собрать более «солидную» колонну. Он сделал радиус ее основания $R_2 = 15$ см. Колонна какой высоты получилась у Глюка? Плотность влажного песка $\rho = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, его модуль Юнга $E = 3{,}0 \cdot 10^6$ Па, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Примечание. Модуль Юнга – это коэффициент пропорциональности между давлением (или растяжением), действующим на плоскую поверхность исследуемого образца, и его относительным сжатием (удлинением).

В.Слободянин

Задача 2. Ползущая пружина

Вблизи края гладкой горизонтальной полуплоскости лежат два одинаковых груза массой m каждый, соединенные легкой нерастянутой пружиной, длина которой l_0, а жесткость k (рис.14). К грузу, ближайшему к краю плоскости, с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через легкий блок, прикреплен еще один такой же груз массой m. Его удерживают так, что участок нити, идущий от блока к этому грузу, вертикален. Нижний груз отпускают. Через какое минимальное время τ удлинение Δl пружины станет максимальным? Найдите это удлинение.

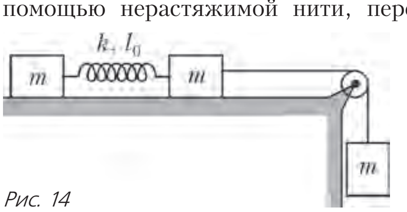


Рис. 14

М.Осин

Задача 3. Градирня

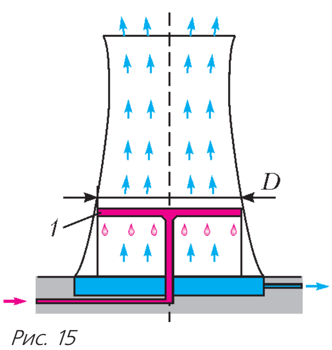


Рис. 15

На промышленных предприятиях для охлаждения больших объемов воды используют градирни. Рассмотрим идеализированную градирню (рис.15), представляющую собой широкий цилиндр диаметром $D = 15$ м, в котором на некоторой высоте H от основания через специальные форсунки (1) распыляется горячая вода, температура которой $t_1 = 50$ °С. По мере падения вода остывает до температуры $t_2 = 28$ °С. Посредством вентилятора навстречу падающим каплям снизу со скоростью $u = 2{,}0$ м/с поднимается воздух при температуре $t_0 = 29$ °С. Считайте, что его температура на протяжении всего пути остается неизменной, а влажность меняется от $\varphi = 40\%$ на входе до $\varphi_1 = 100\%$ на выходе из градирни. Какова производительность q градирни, т.е. сколько тонн воды охлаждается в ней за один час? Для воды удельная теплоемкость $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°С), удельная теплота па-

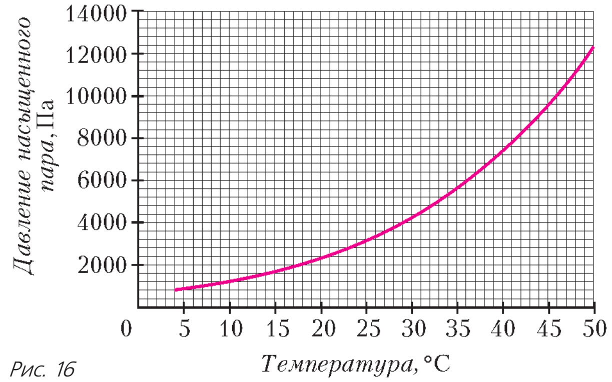


Рис. 16

рообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, а температурная зависимость давления насыщенного пара приведена на рисунке 16.

В.Бабинцев

Задача 4. Конденсаторы

Дана электрическая цепь, параметры которой указаны на рисунке 17. Вначале ключ K разомкнут.

1) Определите напряжение на конденсаторе емкостью C.

2) Определите силу тока, который потечет через резистор сопротивлением $3R$ сразу после замыкания ключа K.

3) Какое напряжение установится на конденсаторе емкостью C после того, как переходные процессы в цепи завершатся?

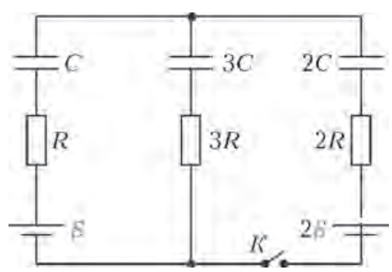


Рис. 17

А.Кобякин

Задача 5. Много катушек

Шесть идеальных катушек индуктивности соединили в электрическую цепь так, что катушки образовали ребра тетраэдра (рис.18). К вершинам A и B подсоединили последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, батарейку с ЭДС $\mathscr{E} = 4{,}6$ В, миллиамперметр и ключ. Индуктивность катушки $L = 1$ мГн. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

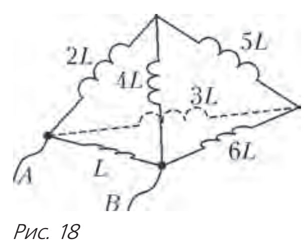


Рис. 18

1) Вычислите силу тока I_{60}, протекающего через миллиамперметр спустя 1 минуту после замыкания ключа.

2) Вычислите силу тока, протекающего через каждую из катушек в тот момент, когда сила тока, протекающего через миллиамперметр, равна $I_A = 23$ мА.

М.Замятнин

Публикацию подготовили М.Замятнин, С.Козел, В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Нет.
Заметим, что 2013 делится на 3, поэтому, сколько бы разрешенных операций мы ни сделали, в числителе будет стоять число, которое не делится на 3. А у любой дроби, равной $3/5$, числитель должен делиться на 3.

2. 33.
Будем называть цвета «меньший», «средний» и «больший» по количеству шариков. Шариков «меньшего» цвета не может быть больше 32, ведь в противном случае их хотя бы 33, а тогда шариков «среднего» цвета не меньше 34, а «большего» – не меньше 35, но $33 + 34 + 35 > 100$. Аналогично, шариков «большего» цвета не менее 35 (потому что $32 + 33 + 34 < 100$).
Таким образом, в первый раз красных шариков было 35 или больше, а во второй раз 32 или меньше. Цвет меняли только волшебные шарики, а всего их было три, поэтому описанные изменения могли произойти, только если сначала все волшебные шарики были красными, а потом стали зелеными. Значит, число белых шариков не менялось и оба раза их было 33.

3. Нет.
Докажем, что первая фраза не могла прозвучать нечетное число раз. Поскольку всего джентльменов 50, у каждого число знакомых и число незнакомых в сумме дают 49. Значит, если у джентльмена нечетное число знакомых, то у него четное число незнакомых.
Если джентльмен имеет четное число знакомых, то он говорит им первую фразу, а остальным – вторую. В этом случае он произносит первую фразу четное число раз. Если же у джентльмена нечетное число знакомых, то он им говорит вторую фразу, а остальным (которых четное число!) говорит первую. Получается, что каждый джентльмен произносит первую фразу четное число раз.

4. Через 20 минут.
Очевидно, что сначала самая быстрая стрелка (т.е. 150-я) догонит самую медленную (1-ю), потом вторая по скорости (149-я) – вторую по медленности (2-ю) и так далее. Значит, 74-я стрелка отвалится, когда ее догонит 77-я. Изначально между ними был один оборот, а сближались они со скоростью $77 - 74 = 3$ оборота в час. Поэтому стрелки встретятся через треть часа, т.е. через 20 минут.

5. а) Разрезание показано на рисунке 1.

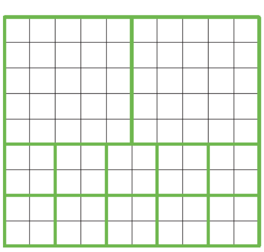


Рис. 1

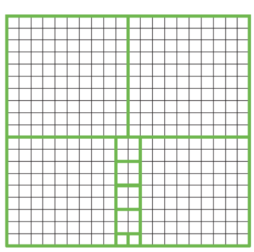


Рис. 2

б) 4.
Пример показан на рисунке 2. Докажем, что меньше квадратов с нечетной стороной получиться не может. Площадь прямоугольника 19×20 делится на 4, площадь любого квадрата с четной стороной – тоже. А вот площадь квадрата с нечетной стороной дает остаток 1 при делении на 4: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Так как сумма площадей квадратов должна делиться на 4, то квадратов с нечетной стороной не может быть меньше четырех.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» № 4 и 5-6 за 2013 г.)

3. На съезд приехали по 25 социал-демократов и либерал-демократов, а также 50 социал-либералов.
От каких двух делегаций было поровну делегатов? В условии об этом не говорится. Можно перебрать все возможные случаи (их, очевидно, 3), и такой путь приведет к успеху. Но, оказывается, имеет смысл пока от этого воздержаться и оставить перебор на потом.
Пусть на съезд приехали x социал-демократов, y либерал-демократов и z социал-либералов. Тогда, в соответствии с условием, на съезде оказалось $(x + z)$ социалистов, $(y + z)$ либералов и $(x + y + z)$ демократов. Суммарное количество социалистов и либералов, очевидно, равно $(x + z) + (y + z) = (x + y + z) + z$. Согласно условию, это в 1,5 раза больше, чем количество демократов:

$$(x + y + z) + z = 1{,}5(x + y + z).$$

А теперь вспомним, что $x + y + z = 100$ (так как всего на съезд прибыли 100 делегатов). Следовательно, $100 + z = 1{,}5 \cdot 100$, и $z = 50$.
Итак, на съезд прибыли 50 социал-либералов. Это позволяет однозначно определить количество делегатов от остальных двух партий. В самом деле, если от одной из них приехало столько же делегатов, сколько и от социально-либеральной партии, т.е. тоже 50 человек, то на долю третьей партии не остается ни одного делегата, что явно противоречит условию. Поэтому остается единственная возможность: количество социал-демократов и либерал-демократов было одинаковое. А так как всего их было $100 - 50 = 50$, то, значит, от каждой из этих партий присутствовали по 25 человек.

6. Обязательно.
Проведем мысленно в прямоугольнике два разреза, соединив середины его противоположных сторон. Прямоугольник разделится на четыре одинаковые части вдвое меньшего размера. На каждой из них можно будет разместить 100 кругов радиуса 1 – тем же способом, как и круги радиуса 2 в исходном прямоугольнике. Ведь размеры кругов тоже уменьшились в два раза. В итоге в исходном прямоугольнике разместятся как раз 400 кругов радиуса 1.

7. а) Да.
Если $a = 2013/2$, $b = 1/2$, то все условия выполнены, в том числе $a/b = 2013$.
б) Нет.
Докажем, что $k = a/b$ не может быть четным числом. Сначала заметим, что так как разность целых чисел тоже целое число, то $2b = (a+b) - (a-b)$ будет целым. Это означает, что число b либо целое, либо имеет вид $b = n + 1/2$ при некотором целом n. Но если k четно, то $a = bk$ в обоих этих случаях будет целым числом. Поэтому и b должно быть целым (так как в сумме с a дает целое). Но тогда ab не может быть дробным числом.

8. Не обязательно.
Существуют не равные друг другу треугольники с одинаковыми периметрами и площадями. Например, такими являются треугольник со сторонами 2, 5, 5 и треугольник со сторонами $4-\sqrt{2}$, 4, $4+\sqrt{2}$: их периметры равны 12, а площади – $\sqrt{24}$.

9. В самом деле, треугольники AOC и BOD равны по двум сторонам и углу между ними: $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle AOC = \angle BOD$ (рис. 3). Эти углы равны, потому, что каждый из них равен $\angle AOD + 60°$. Из равенства этих треугольников следует, что $AC = BD$.
Четырехугольник $MNLK$ является параллелограммом

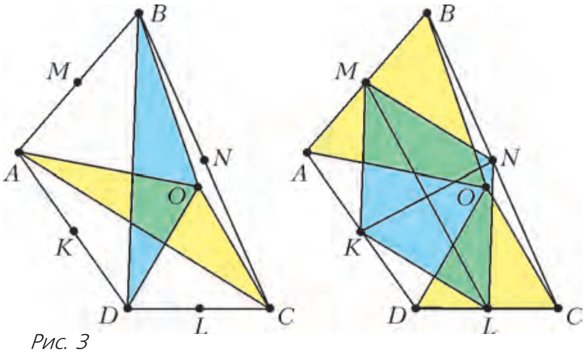


Рис. 3

Вариньона для четырехугольника $ABCD$. Если диагонали четырехугольника $ABCD$ равны, то $MNLK$ является ромбом, и его диагонали взаимно перпендикулярны.

10. 1, 2, 3 или 4 фишки.

Ясно, что на доске всего расставлено 8 фишек. Пусть на доске выделен прямоугольник, который будет впоследствии выпилен. Расположим доску так, чтобы одна из ее сторон была горизонтальна, другая – вертикальна, и чтобы ширина прямоугольника равнялась 5 клеткам, а высота – 4 клеткам (а если получилось наоборот, повернем доску на 90 градусов).

Сначала найдем ограничения сверху и снизу для количества попавших в прямоугольник пешек.

Ограничение сверху. Так как в каждой горизонтали доски стоит по одной фишке, то в каждой горизонтали прямоугольника – не более одной фишки. А поскольку таких горизонталей всего 4, то в прямоугольнике находится никак не больше 4 пешек.

Ограничение снизу. Рассмотрим те горизонтали и вертикали доски, которые не имеют общих клеток с прямоугольником. Очевидно, таковых будет 4 горизонтали и 3 вертикали. В каждой из этих горизонталей и в каждой из вертикалей имеется по 1 фишке, поэтому суммарное число пешек на них – не больше 4 + 3 = 7 (а может быть и меньше, если какая-то фишка принадлежит сразу горизонтали и вертикали). Поэтому внутри прямоугольника лежит не меньше 8 – 7 = 1 фишки.

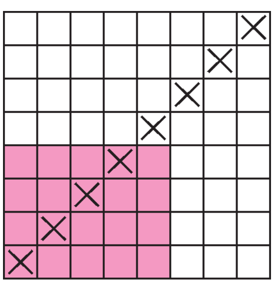


Рис. 4

Итак, в прямоугольнике не меньше 1 и не больше 4 пешек. Осталось проверить, что все эти значения достижимы. Для этого расположим фишки вдоль диагонали (они отмечены крестиками), а прямоугольник выделим красным цветом (рис. 4).

Здесь, как видно, в прямоугольник попали 4 фишки. Сдвигая прямоугольник вправо на 1, 2 и 3 клетки, получим варианты, когда в него попали 3, 2 и 1 фишка соответственно.

ГЕОМЕТРИЯ НА ПАРКЕТЕ

1. Для разбиения на рисунке 3,*а* статьи: $1/(mn+1)$; для разбиения на рисунке 3,*б* статьи: $1/(mn-1)$.

В обоих случаях нужно продолжить решетку из маленьких параллелограммов и подсчитать число узлов внутри большого параллелограмма.

2. $1/7$.

Можно доказать, что точки A, B, C и точки пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 являются узлами решетки из параллелограммов, как изображено на рисунке 5 (существование решетки можно, например, вывести из того, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 делят друг друга в отношении $3:3:1$). Если принять площадь такого параллелограмма за s, то площадь треугольника ABC равна $\left(3+3\cdot\frac{1}{6}\right)s=\frac{7}{2}s$, а площадь маленького синего треугольника равна $\frac{s}{2}$. Значит, ответом будет $\frac{s}{2}:\frac{7s}{2}=\frac{1}{7}$.

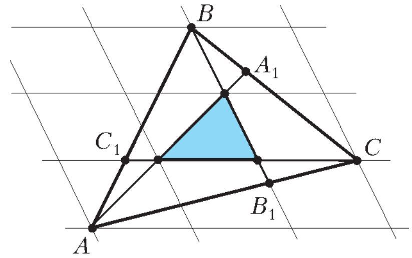


Рис. 5

3. Замостим плоскость копиями данного в условии рисунка и получим то, что изображено на рисунке 6. Нам нужно доказать, что равны площади синих и красных шестиугольников (показанных в верхней части рисунка). Соединим маленькие квадратики пунктирными линиями. Тогда возникнет «толстая решетка», у которой вместо узлов квадратики и «соединяющие» их параллелограммы вместо ребер. Очевидно, что если эту «решетку» повернуть на 90° вокруг центра любого квадратика, то она совместится с собой. Поэтому все параллелограммы равны и разбивают плоскость на квадраты. Каждый из них состоит из двух синих и двух красных треугольников с общей вершиной. В статье было доказано, что в таком случае площадь синих треугольников равна площади красных. А теперь вернемся к шестиугольникам: синий состоит из тех же двух синих треугольников и одного параллелограмма, красный – из двух красных треугольников и точно такого же параллелограмма. Значит, площади шестиугольников равны.

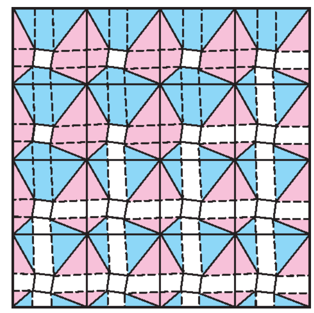


Рис. 6

4. Пусть M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ соответственно (рис. 7). Будем считать, что плоскость замощена равными $ABCD$ плитками так же, как обсуждалось в статье. Пусть плитка $CDEF$ граничит с $ABCD$ по стороне CD (она симметрична $ABCD$ относительно точки N), а точка L – середина EF. Так как точки M и L симметричны относительно точки N, то все три лежат на одной прямой и $ML = 2MN$. С другой стороны, $ML = AE$. Теперь утверждение задачи следует из неравенства треугольника и из того, что $DE = BC$.

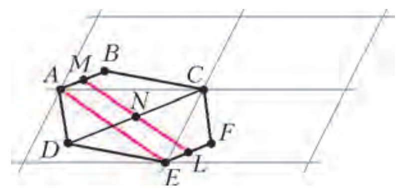


Рис. 7

5. Будем пользоваться тем, что площадь параллелограмма не превосходит половины произведения диагоналей, причем равенство достигается только тогда, когда диагонали перпендикулярны. Вот краткий план доказательства этого факта. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре треугольника, площадь каждого из них равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. Для каждого треугольника возьмем в этой формуле угол при точке пересечения диагоналей, его синус не больше 1 (и равен 1, когда диагонали перпендикулярны).

Теперь рассмотрим замощение плоскости копиями данного четырехугольника $ABCD$ и связанное с ним за-

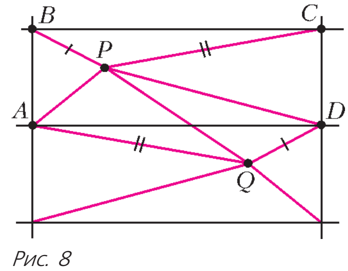


Рис. 8

мощение параллелограммами (опять воспользуемся рисунком 7). Площадь каждого параллелограмма вдвое больше площади $ABCD$ и не больше половины произведения диагоналей этого параллелограмма. Как видно из рисунка 7, диагональ $AE \le AD + DE = AD + BC$. Аналогично, другая диагональ не больше суммы $AB + CD$. Тогда площадь $ABCD$ не больше $\frac{1}{4}(AD+BC)(AB+CD)$.

Чтобы получилось равенство, необходимо равенство $AD + BC = AE$, т.е. стороны AD и BC должны быть параллельны. И то же самое должно выполняться для второй диагонали параллелограмма. К тому же, сами диагонали должны быть перпендикулярны. Но это и означает, что $ABCD$ – прямоугольник.

6. Треугольники ADQ и CBP равны, поэтому площадь $APDQ$ в два раза меньше площади $ABCD$ (рис.8). Теперь, так как площадь треугольника не больше половины произведения двух его сторон, имеем

$$S_{APDQ} = S_{APQ} + S_{DPQ} \le AP \cdot AQ/2 + DP \cdot DQ/2 = \frac{1}{2}(PA \cdot PC + PB \cdot PD).$$

Поэтому $S_{ABCD} \le PA \cdot PC + PB \cdot PD$.

7. Шестиугольником из условия задачи можно замостить плоскость (см. рис.5 в статье). При этом вершины нужного треугольника будут узлами соответствующей решетки. Тогда получается, что каждый шестиугольник содержит по три таких узла, а каждый такой узел принадлежит трем шестиугольникам. Значит, площадь шестиугольника равна площади параллелограмма решетки, а площадь нужного треугольника равна ее половине.

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ БУРАТИНО

1. Пусть Буратино гулял по Четырехугольному лесу $ABCD$, начав из точки S_1 на стороне AB и проходя последовательно через точки S_2, S_3, S_4 и S_5 на сторонах четырехугольника (рис.9). Докажем, что $S_1 = S_5$. Пусть S_1 делит сторону AB в отношении $x : y$, т.е. $AS_1 : BS_1 = x : y$. По теореме Фалеса $BS_2 : CS_2 = BS_1 : AS_1 = y : x$, так как S_1S_2 параллельно AC. Значит, S_2 делит сторону BC в отношении $y : x$. Рассуждая аналогично, получим, что S_3 делит CB в отношении $x : y$, S_4 делит DA в отношении $y : x$, S_5 делит AB в отношении $x : y$. Значит, $S_1 = S_5$.

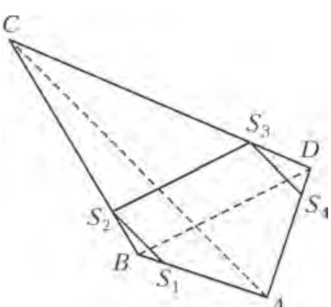


Рис. 9

2, 3. Как и в решении предыдущей задачи, рассмотрим точки, в которых Буратино меняет направление движения. Найдем, как меняется отношение, в котором очередная точка делит сторону треугольника. Если изначально отношение было $x : y$ (где $x \ne y$), то на следующей стороне оно будет $y : x$, потом $x : y$, а когда он вновь вернется на исходную сторону, будет $y : x$. Пройдя еще три отрезка пути, Буратино попадет в точку, которая делит сторону в отношении $x : y$, т.е. вернется в исходную точку.

Если же изначально $x : y = 1 : 1$, то Буратино стартовал с середины стороны треугольника, и он вернется в исходную точку, пройдя три отрезка пути.

4. На стороне BC правильного треугольника ABC отмечена произвольная точка A_1 (рис.10). Из точки A_1 получили A_2 по такому правилу: точка B_1 – проекция A_1 на сторону AC, точка C_1 – проекция B_1 на сторону AB, точка A_2 – проекция C_1 на сторону BC. По такому же правилу из A_2 получается A_3, и вообще – из точки A_n получается точка A_{n+1} и так далее. Давайте разберемся, как ведет себя последовательность этих точек.

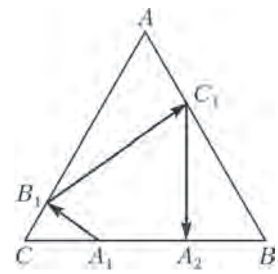


Рис. 10

Пусть длина стороны треугольника ABC равна 1. Пусть $BA_n = x_n$, $BA_{n+1} = x_{n+1}$. Выразим x_{n+1} через x_n. Используя, что катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы, последовательно находим

$$A_1C = 1 - x_n, \quad CB_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_n, \quad AB_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_n,$$

$$AC_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_n\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_n,$$

$$BC_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_n, \quad A_2B = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{3}{8} - \frac{x_n}{8}.$$

Получается рекуррентное уравнение $x_{n+1} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x_n$. Его можно переписать в виде

$$\left(x_{n+1} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{8}\left(x_n - \frac{1}{3}\right).$$

Пусть T – такая точка на отрезке BC, что $BT = \frac{1}{3}$.

Наше рекуррентное уравнение показывает, что расстояние от очередной точки A_{n+1} до T в восемь раз меньше, чем от предыдущей. Это значит, что последовательность точек (A_n) стремится к точке T (со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $-\frac{1}{8}$), причем никогда не попадет в эту точку – кроме случая, когда изначально $A_1 = T$. (Интересно, что две последовательные точки A_n и A_{n+1} располагаются по разные стороны от точки T – последовательность чисел $x_n - \frac{1}{3}$ является знакочередующейся.)

В математике итерационные процессы очень часто позволяют найти приближенное решение соответствующей задачи. В нашем случае три точки A_n, A_{n+1}, A_{n+2} служат вершинами треугольника, стороны которого почти перпендикулярны сторонам исходного треугольника. И это *почти* тем точнее, чем больше n.

ЗАДАЧИ НА ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

1. $v_0 = 0{,}2$ м/с.	**2.** $v = 12$ м/с.	**3.** $x = 0{,}3$ м.
4. $Q = 840$ Дж.	**5.** $A = 290$ Дж.	**6.** $v_{max} = 2$ м/с.
7. $Q = 1{,}35$ Дж.	**8.** $v_{max} = 0{,}4$ м/с.	**9.** $x_{max} = 0{,}24$ м.
10. $F_{min} = 6$ Н.	**11.** $A = 0{,}12$ Дж.	**12.** $Q = 45$ мДж.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ С ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

1. *Указание.* Приведем уравнение к виду

$$x = -\frac{c}{a} + \frac{ad + bc}{a(ay + b)}$$

и заметим, что целое число $ay + b$ должно быть делителем числа $ad + bc$, но таких делителей конечное число.

2. а) (–4; 1), (0; –3), (2; 7), (6; 3); б) (–2; 1), (–4; 3); в) (2; 10), (–4; –2), (4; –2), (10; 10).

Указание. Заметьте, что $y = x + 1 - \frac{7}{x - 3}$.

г) (240; 57360), (478; 478), (57360; 240).

д) 43. *Указание*. Заметим, что при составных $N = ab$ число

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b(b+1)}\right)=\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N},$$

так что уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$ имеет больше трех решений. Если же N простое, то в точности 3 решения (докажите это).

3. а) -3, -2, 0, 1; б) -3, -1, 0, 2.
Указание. Так как $\frac{n^5+3}{n^2+1}=n^3-n+\frac{n+3}{n^2+1}$, сразу видно решение $n = -3$, а также – что заведомо не годятся n, для которых $0<\left|\frac{n+3}{n^2+1}\right|<1$, т.е. $n < -1$ и $n > -2$. Осталось проверить числа $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$.

4. $(\pm1;-5;0)$, $(\pm1;5;0)$. *Указание*. Запишите уравнение в виде $5x^2+(y-z)^2+2z^2=30$ и воспользуйтесь тем, что $5x^2<30$, т.е. либо $x^2=0$, либо $x^2=1$, либо $x^2=4$.

5. а) При $n = 1$. Если $n\neq1$, то

$$n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$$

– оба сомножителя больше 1. б) При $n = 1$. Если данное число простое, то n нечетно. Разложим n^4+4^n на 2 множителя:

$$n^4+2\cdot2^n+2^{2n}-2\cdot2^n\cdot n^2=\left(n^2+2^n\right)^2-2^{n+1}\cdot n^2,$$

где $2^{n+1}\cdot n^2$ – полный квадрат.

6. а) (1; 1), (3; 2); б) (0; 0); в) (0; 0), (2; 2).

7. Нет. Такое произведение можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)=z^2+2z,$$

где $z=n^2+3n$, но $z^2<z^2+2z<(z+1)^2$, т.е. z^2+2z заключено между двумя последовательными квадратами.

8. (0; 0), (1; 0), (2; 1). *Указание*. При $x > 2$ левая часть делится на 3, а правая – нет.

9. (2; 0).

10. (0; 0).

11. а), б) Решений нет; в) (0; 0); г) (2; 2). *Указание*. Докажите, что m и n – четные числа. При $m = 2k$ и $n = 2l$

$$3^{2k}-2^{2l}=\left(3^k-2^l\right)\left(3^k+2^l\right)=5.$$

Из простоты числа 5 следует, что $3^k-2^l=1$, $3^k+2^l=5$, откуда $3^k=3$, $2^l=2$.

12. а) Нет. Заметим, что $2014\equiv6\pmod 8$. Но $(2k+1)^2\equiv$ $\equiv1\pmod 8$. Сумма же семи квадратов при делении на 8 дает остаток 7.
б) Да. Одно из решений: $2014=43^2+11^2+5^2+3^2+3^2+1$. *Указание*. Из 2014 вычтем наибольший возможный нечетный квадрат, затем то же самое проделаем с разностью и т.д.

13. а) Будем считать, что числа a, b, c взаимно просты. Докажите сначала, что числа a и b разной четности, причем либо a, либо b делится на 3, а также, что одно из этих чисел делится на 4. Докажите далее, что если ни a, ни b не делятся на 5, то a^2+b^2 делится на 5. Здесь возможны все случаи, т.е. может быть, что ab делится на 60, а также, что ab делится на 12, а c – на 5:

$$3^2+4^2=5^2,\quad 5^2+12^2=13^2.$$

б) (1; 3). *Указание*. Если $x > 0$ – четное число, то $2^x\equiv4^x\equiv1\pmod3$, т.е. $y^2\equiv2\pmod3$, что невозможно. Итак, x нечетно. Но $2^x\equiv4^x\equiv0\pmod4$ при $x > 1$, а $3^x\equiv3\pmod4$. Сравнение же $y^2\equiv3\pmod4$ решений не имеет. При $x = 1$ левая часть равна 9.
в) $n = 3$. *Указание*. Ясно, что n нечетно, но тогда $2^n\equiv2\pmod3$, и если n не делится на 3, то $n^2\equiv1\pmod3$. Но тогда 2^n+n^2 делится на 3. Если же $n = 3$, то $2^n+n^2=17$.

14. (2; 4), (4; 2).

15. (2; 3; 4).

16. Четверки (m; n; k; l) таковы: (2; 4; 1; 5), (5; 1; 4; 2). *Указание*. Перемножив и сложив уравнения системы, получим, что $\left(m^2+k^2\right)\left(n^2+l^2\right)=205=5\cdot41$. Значит, либо $m^2+k^2=5$, $n^2+l^2=41$, либо $m^2+k^2=41$, $n^2+l^2=5$. Требуется еще учесть, что $nk > ml$.

17. $\left(5k+3;10k^2+5k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. *Указание*. Поскольку $5y=(x-3)(2x-1)$, то либо $x-3\equiv0\pmod5$, либо $2x-1\equiv0\pmod5$. Оба случая дают $x\equiv3\pmod5$, т.е. $x =$ $= 5k + 3$, $k\in\mathbb{Z}$.

18. (4; 3), (6; 13), (14; 5).

19. (1; -1), (-1; 1). *Указание*. Разложив левую часть на множители, имеем $(3m-n)(2m+n)=3$. Осталось воспользоваться простотой числа 3.

20. (0; 0). *Указание*. Примените метод бесконечного спуска.

21. (0; 0), (2; 2), (0; 3), (3; 0). *Указание*. Если $x = 0$, то $y = 0$ или $y = 3$. Аналогично, при $y = 0$ получим $x = 0$, $x = 3$. Если $xy\neq0$, то $|x+y-3|\neq0$ и, так как $x^2+y^2\geq2|x||y|$, имеем $2|x||y||x+y-3|\leq2|x||y|$, причем равенство возможно лишь при $|x|=|y|$, $|x+y-3|=1$.

22. ($7n$; $3n$; $2n$), $n\in\mathbb{Z}$. *Указание*. Рассмотрите уравнение как квадратное:

$$x^2+2x(y-5z)+5y^2-22yz+34z^2=0.$$

Для него

$$D/4=(y-5z)^2-5y^2+22yz+34z^2=-(2y-3z)^2,$$

откуда $2y = 3z$, $y = 3n$, $z = 2n$, где $n\in\mathbb{Z}$. При этом $x = 5z -$ $- y = 10n - 3n = 7n$.

23. (0; 2), (-2; 0), (0; 3), (2; 1). *Указание*. Решите уравнение как квадратное относительно одного из неизвестных (подумайте, относительно какого из неизвестных это удобнее сделать), после чего разложите на множители.

24. $(2;\pm3)$, $(-2;\pm3)$. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $t=x^2$.

25. -15. *Указание*. Заметим, что левая часть при любом n рациональное число. Следовательно, $\sqrt{1-8n}$ – целое (почему?), причем $n < -1$. Значит, левая часть, равная $5n-1+\frac{14}{n+1}$, должна быть целым отрицательным числом, т.е. $n + 1$ – делитель числа 14. Все возможные значения n это -2, -3, -8, -15. Проверка показывает, что подходит лишь $n = -15$.

26. (2; 1). *Указание*. Воспользуйтесь основной теоремой арифметики.

27. (-5; 20), (-5; 21). Из условия следует, что $x+25\leq1-4x$ и $x^2-25\leq1-4x$, откуда $x = -5$, $20\leq y\leq21$.

28. (9; 9).

29. 41472.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XL ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Не могло.
Пусть такое могло оказаться. Обозначим данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{111}$, а их сумму – через S. По условию, для каждого номера k числа a_k и $S-a_k$ оканчиваются одной и той же цифрой. Отсюда следует, что разность этих чисел, равная $S-2a_k$, делится на 10. Значит, при любом k число $2a_k$ оканчивается последней цифрой суммы S. Это означает, что разность между любыми двумя числами a_k делится на 5. Итак, все 111 различных чисел a_i должны давать одинаковые остатки от деления на 5; но среди чисел от 1 до 500 ровно по

100 чисел, дающих фиксированный остаток от деления на 5. Противоречие.

2. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD (рис.11). Биссектрисы углов ADB и DAC пересекаются в центре O_1 окружности, вписанной в треугольник AOD, а биссектрисы углов ACB и DBC – в центре O_2 окружности, вписанной в треугольник BOC. Значит, точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисах вертикальных углов AOD и BOC. Рассмотрим ромб PO_1QO_2 из условия задачи. В нем $\angle PO_1O_2 = \angle QO_1O_2$, а значит, $\angle DO_1O = \angle AO_1O$. Поэтому треугольники AOO_1 и DOO_1 равны по стороне (O_1O – общая) и двум прилежащим углам, откуда $AO = DO$. Тогда $\angle OAD = \angle ODA$, и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно серединного перпендикуляра к AD. Поэтому $AB = CD$.

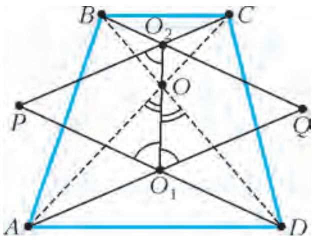


Рис. 11

3. 14.

Число N может равняться 14, как показывает, например, четверка чисел 4, 15, 70, 84. Осталось показать, что $n \ge 14$.

Лемма. *Среди попарных НОД четырех чисел не может быть ровно двух чисел, делящихся на некоторое натуральное k.*

Доказательство. Если среди исходных четырех чисел есть не больше двух чисел, делящихся на k, то среди попарных НОД на k делится не более одного. Если же три из исходных чисел делятся на k, то все три их попарных НОД делятся на k. Лемма доказана.

Применяя лемму к $k = 2$, получаем, что число N четно. Применяя ее же к $k = 3$, $k = 4$ и $k = 5$, получаем, что N не делится на 3, 4 и 5. Значит, N не может равняться 6, 8, 10 и 12.

4. 1.

Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма. *Для любых двух клеток A и B существует такая клетка C, закрасив которую, можно затем закрасить и A, и B (возможно, C совпадает с A или с B.)*

Доказательство. Можно считать, что номер a клетки A меньше, чем номер b клетки B. Пусть D – клетка в одном столбце с A и в одной строке с B и пусть d – ее номер (возможно, $D = A$ или $D = B$). Тогда, если $d < a$, то после закрашивания A можно последовательно закрасить D и B; если $a \le d \le b$, то после закрашивания D можно закрасить как A, так и B; наконец, если $d > b$, то после закрашивания B можно последовательно закрасить D и A. Итак, в любом случае в качестве C можно выбрать одну из клеток A, B и D. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Ясно, что $k \ge 1$; значит, достаточно доказать, что при $k = 1$ закраска всегда возможна. Зафиксируем произвольную нумерацию клеток. Рассмотрим все способы закрашивания клеток согласно условию (при $k = 1$) и выберем из них тот, в котором количество закрашенных клеток максимально. Пусть в этом способе первая закрашенная клетка – A. Предположим, что при этом способе какая-то клетка B осталась незакрашенной. Тогда, выбрав по лемме соответствующую клетку C и начав закрашивание с нее, мы потом сможем закрасить B, A и, как следствие, все клетки, закрашенные в выбранном способе. Значит, всего мы закрасим хотя бы на одну клетку больше. Противоречие с выбором способа показывает, что на самом деле в нашем способе будут закрашены все клетки. Это и означает, что $k = 1$ подходит.

5. $\sqrt{2} - 1$.

Обозначим $a = x - \sqrt{2}$, $b = x - 1/x$, $c = x + 1/x$, $d = x^2 + 2\sqrt{2}$. Заметим, что b и c не могут одновременно быть целыми. Действительно, тогда число $b + c = 2x$ также целое, значит, x рационально, поэтому как a, так и d не будут целыми как суммы рационального и иррационального чисел. Итак, одно из чисел b и c нецелое, а тогда a и d должны оба быть целыми.

Значит, $x = a + \sqrt{2}$ при целом a. Тогда

$$d = a^2 + 2a\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} = \left(a^2 + 2\right) + \left(2a + 2\right)\sqrt{2},$$

откуда следует, что $2a + 2 = 0$, так как иначе d иррационально. Итак, $a = -1$, откуда $x = \sqrt{2} - 1$. Осталось проверить, что найденное число подходит: для него целыми будут числа $a = -1$, $b = -2$ и $d = 3$.

7. $90°$.

Обозначим через N и M середины отрезков KC и AC соответственно (рис.12). Тогда MN – средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырехугольник $ABCD$ – вписанный.

Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD, т.е. она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

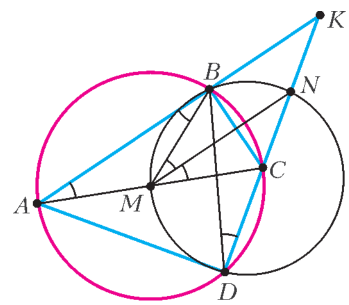


Рис. 12

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, т.е. в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90°$, а значит, и $\angle ADC = 90°$.

8. Второе число больше.

Пусть $a = 99!$. Тогда нам нужно сравнить числа $(100a)!$ и $a^{100a} \cdot (100a)^a$. Заметим, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a < a^a,$$

$$(a+1)(a+2)(a+3) \cdot \ldots \cdot 2a < (2a)^a,$$

$$(2a+1)(2a+2)(2a+3) \cdot \ldots \cdot 3a < (3a)^a,$$

$$\vdots$$

$$(99a+1)(99a+2)(99a+3) \cdot \ldots \cdot 100a < (100a)^a.$$

Перемножим эти неравенства. Слева получим произведение всех чисел от 1 до $100a$, т. е. в точности $(100a)! = (100!)!$, а справа – число

$$a^a (2a)^a (3a)^a \cdot \ldots \cdot (100a)^a = a^{100a} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)^a = a^{100a} (100!)^a,$$

т.е. в точности

$$a^{100a} (100a)^a = 99!^{100!} \cdot 100!^{99!}.$$

10 класс

1. Допустим противное. Тогда каждую из оценок 2, 3, 4, 5 ученик получил не меньше трех раз. Возьмем по три оценки каждого вида; сумма 12 взятых оценок равна 42. Так как каждая из оставшихся пяти оценок не меньше 2 и не больше 5, сумма всех 17 оценок не меньше $42 + 5 \cdot 2 = 52$ и не больше $42 + 5 \cdot 5 = 67$. Но ни одно из чисел от 52 до 67 не делится на 17, поскольку $3 \cdot 17 = 51$ и $4 \cdot 17 = 68$. Значит, среднее арифметическое всех оценок – нецелое. Противоречие.

2. Например, такими числами являются $n_1 = 10^{100} - 1 = 99\ldots9$

и $n_2 = \frac{10^{100}}{2} - 1 = 49\ldots9$. Действительно, числа $n_1^3 - n_1 = (n_1+1)n_1(n_1-1) = 10^{100}\cdot n_1(n_1-1)$ и $n_2^3 - n_2 = (n_2+1)n_2(n_2-1) = 10^{100}\cdot n_2 \cdot \frac{n_2-1}{2}$ делятся на 10^{100}; это означает, что n_i^3 оканчивается на n_i. С другой стороны, числа $n_1^2 - n_1 = n_1(n_1-1)$ и $n_2^2 - n_2 = n_2(n_2-1)$ не делятся на 5 (и тем более на 10^{100}); значит, n_i^2 не оканчивается на n_i.

Замечание. Существуют и другие необычные стозначные числа.

3. $2^{14} - 2^7 = 16256$.

Если все последовательности, количество букв в которых не меньше 7 и не больше 13, являются словами, то, очевидно, условие задачи соблюдается; при этом количество таких слов равно $2^7 + \ldots + 2^{13} = 2^{14} - 2^7$. Осталось показать, что это количество – наибольшее возможное.

Общее количество последовательностей длины, не превосходящей 13, равно $2 + 2^2 + \ldots + 2^{13} = 2^{14} - 2$. Если среди слов в языке нет ни одного 7-буквенного, то общее количество слов не превосходит $2^{14} - 2 - 2^7 < 2^{14} - 2^7$. Пусть, напротив, в языке существует 7-буквенное слово s. Тогда для каждого слова t, состоящего из 6 или менее букв, последовательность букв st не может являться словом и все последовательности вида st, очевидно, различны. Значит, если в языке есть k слов из 6 или менее букв, то количество слов хотя бы из 7 букв не превосходит $\left(2^7 + \ldots + 2^{13}\right) - k = 2^{14} - 2^7 - k$. Значит, общее количество слов не превосходит $k + \left(2^{14} - 2^7 - k\right) = 2^{14} - 2^7$, что и требовалось доказать.

4. Заметим, что

$$\overrightarrow{A_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1C_2} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = \vec{0}. \qquad (*)$$

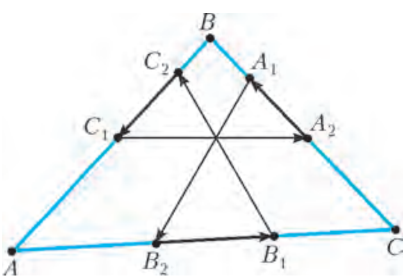


Рис. 13

По условию имеем $A_1B_2 = B_1C_2 = C_1A_2$ и угол между любыми двумя из трех прямых A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 равен 60° (рис.13). Поэтому если векторы $\overrightarrow{A_1B_2}$, $\overrightarrow{B_1C_2}$ и $\overrightarrow{C_1A_2}$ отложить последовательно друг за другом (каждый следующий от конца предыдущего), то получится правильный треугольник, откуда $\overrightarrow{A_1B_2} + \overrightarrow{B_1C_2} + \overrightarrow{C_1A_2} = \vec{0}$. Отсюда и из $(*)$ получаем $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1} = \vec{0}$.

Следовательно, отложив векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{B_2B_1}$, $\overrightarrow{C_2C_1}$ от некоторой точки последовательно друг за другом, мы получим некоторый треугольник T. Стороны треугольника T параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC, поэтому эти треугольники подобны. Из этого подобия и вытекает требуемое равенство.

5. Верно.

Пусть Петя первым ходом сделает свободный член уравнения нулем. Тогда полученное уравнение точно будет иметь корень 0; значит, Пете достаточно добиться того, чтобы другим корнем было число $t = 2014$. Это всегда можно сделать: если после хода Васи получится уравнение $x^3 + ax^2 + *x = 0$, то Петя может заменить оставшуюся звездочку на $-t(t+a)$, а если после хода Васи получится $x^3 + *x^2 + bx = 0$, то Петя может заменить звездочку числом $-\left(t^2 + b\right)/t$. Очевидно, все числа, которые ставит Петя, рациональны.

6. Поскольку CP и BP – касательные к Ω, имеем $\angle OBP = \angle OCP = 90°$; значит, точка P лежит на описанной окружности треугольника OBC и PO – диаметр этой окружности (рис.14). Поэтому $\angle OSP = 90°$. Далее, поскольку AO – диаметр окружности, проходящей через A, S и O, получаем $\angle ASO = 90°$. Итак, точки A и P лежат на перпендикуляре к OS, проходящем через точку S. Отсюда и следует утверждение задачи.

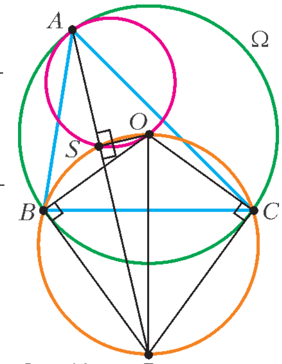


Рис. 14

7. Не могут.

Пусть $n = 10^{1000}$. Обозначим исходные числа (в порядке обхода) через $a_1, \ldots, a_n$; мы будем считать, что $a_{n+1} = a_1$. Положим $b_i = \text{НОК}(a_i, a_{i+1})$. Предположим, что числа $b_1, \ldots, b_n$ – это n подряд идущих натуральных чисел. Рассмотрим наибольшую степень двойки, 2^m, на которую делится хотя бы одно из чисел a_i. Заметим, что ни одно из чисел $b_1, \ldots, b_n$ не делится на 2^{m+1}. Пусть для определенности $a_1 \vdots 2^m$; тогда $b_1 \vdots 2^m$ и $b_n \vdots 2^m$. Значит, $b_1 = 2^m x$ и $b_n = 2^m y$ при некоторых нечетных x и y. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$. Тогда, поскольку $b_1, \ldots, b_n$ образуют n последовательных чисел, среди них должно быть и число $2^m(x+1)$ (поскольку $2^m x < 2^m(x+1) < 2^m y$). Но это число делится на 2^{m+1} (так как $x+1$ четно), что невозможно. Противоречие.

8. Построим граф с вершинами $r_1, \ldots, r_{50}$, соответствующими строкам доски, и вершинами $c_1, \ldots, c_{50}$, соответствующим ее столбцам. Вершины r_i и c_j соединим ребром, если клетка в пересечении соответствующих строки и столбца свободна. Тогда Васина цель переформулируется так: *требуется отметить не более 99 ребер так, чтобы из каждой вершины выходило четное число непомеченных ребер*. Действительно, если Вася поставит фишки в клетки, соответствующие отмеченным ребрам, то в каждой строке и каждом столбце останется четное число свободных клеток, что, очевидно, равносильно требуемому условию.

Мы докажем более общий факт: в любом графе на $n \ge 2$ вершинах можно отметить не более $n-1$ ребер так, чтобы из каждой вершины выходило четное число непомеченных ребер. При $n = 100$ получаем требуемое утверждение.

Индукция по n. База при $n = 2$ очевидна. Пусть теперь $n > 2$. Если есть вершина степени 1, то можно пометить единственное ребро, выходящее из нее, выкинуть ее вместе с этим ребром и применить к оставшемуся графу предположение индукции; в результате окажется отмеченным еще $n-2$ ребра. Если в графе есть вершина степени 0, то достаточно выкинуть ее и применить предположение индукции.

Пусть теперь степень каждой вершины не меньше 2. Выйдем из произвольной вершины по ребру, из вершины, в которую мы пришли, – по другому ребру и т.д.; этот процесс можно продолжать, пока мы не вернемся в вершину, в которой уже побывали. Таким образом, в графе нашелся цикл. Выкинув его ребра из графа, мы не изменим четностей степеней вершин; значит, достаточно отметить требуемые ребра в оставшемся графе. Применяя к нему тот же процесс, рано или поздно мы получим граф, в котором степень некоторой вершины не превосходит 1; а для таких графов утверждение уже доказано выше.

11 класс

1. Рассмотрим одну из сумм из условия. Затем переставим в ней аргументы одного синуса и одного косинуса, назовем эти аргументы α и β соответственно; сумма при этом изменится на

$$(\sin\beta + \cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\beta) = \sqrt{2}\left(\sin(\beta - \pi/4) - \sin(\alpha - \pi/4)\right).$$

Поскольку по условию значение суммы не изменяется, получаем, что $\sin(\alpha - \pi/4) = \sin(\beta - \pi/4)$. Поскольку $\alpha, \beta \in (0; \pi)$, это может случиться лишь при $\alpha - \pi/4 = \beta - \pi/4$ или $\alpha - \pi/4 = \pi - (\beta - \pi/4)$, т.е. при $\beta = \alpha$ или $\beta = 3\pi/2 - \alpha$. Итак, если α – произвольный угол 7-угольника, то каждый из остальных его углов равен либо α, либо $3\pi/2 - \alpha$. Значит, углы 7-угольника принимают не более двух различных значений, поэтому 4 из них принимают одно и то же значение.

2. 60.

Пусть значение исходного выражения равно A. Тогда в результате первой операции произведение примет значение $\frac{a+1}{a} \cdot A = A + 3$, откуда $A = 3a$. Значит, A – натуральное число. Кроме того, из этого равенства следует, что оно делится на 3. Аналогично доказывается, что число A делится на 4 и на 5, причем $A = 4c = 5e$. Из попарной взаимной простоты чисел 3, 4 и 5 следует, что A делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Значит, $A \geq 60$.

Переписав равенство $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = A$ в виде $\frac{A}{3b} \cdot \frac{A}{4d} \cdot \frac{A}{5f} = A$, получаем $A^2 = 60bdf$, откуда $bdf = \frac{A^2}{60} \geq 60$. Осталось привести пример, показывающий, что произведение знаменателей может быть равным 60. Один из возможных примеров такой: $\frac{20}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5}$.

3. n.

Покажем, что n фишек достаточно. Для этого заметим, что на каждую строку хватит одной фишки: можно поставить ее в клетку строки с минимальным номером, а затем обойти все клетки строки в порядке возрастания номеров.

С другой стороны, покажем, что меньше n фишек может и не хватить. Для этого пронумеруем клетки так, чтобы клетки одной диагонали имели номера 1, 2, …, n (остальные клетки нумеруем произвольно). Тогда одна фишка не сможет побывать на двух клетках этой диагонали: если фишка встала на одну из этих клеток, то следующим ходом она обязана будет пойти на клетку с номером, большим n, и, значит, после этого она не сможет вернуться на диагональ.

Наконец, поскольку на каждой клетке диагонали должна побывать фишка, Пете придется использовать не менее n фишек.

4. Обозначим через A', B', C', D' проекции на плоскость α вершин A, B, C, D соответственно (рис.15). Пусть X – произвольная точка на продолжении отрезка KL за точку K. Тогда имеем $\angle(KXA, KXN) = \angle(KLA, KLN)$ и $\angle(KNA, KNX) = \angle(NKD, NKL)$. По условию эти углы равны; значит, в трехгранном угле $KANX$ (с вершиной K) двугранные углы при ребрах KN и KX равны между собой. Это означает, что плоскость, проходящая через прямую KA и перпендикулярная плоскости α, – это плоскость симметрии трехгранного угла $KANX$. Поэтому точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису угла XKN, т.е. на внешней биссектрисе угла NKL.

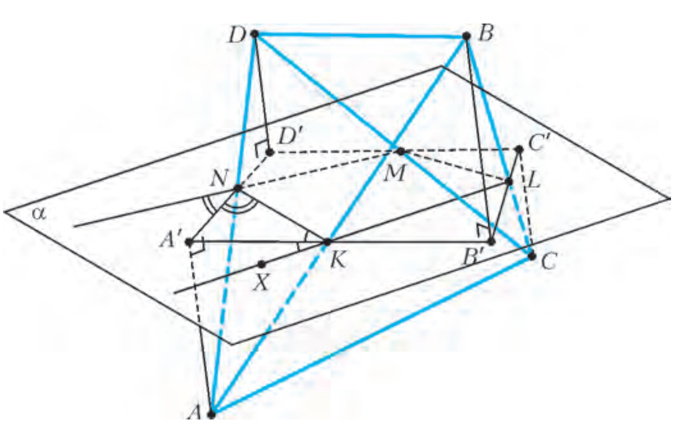


Рис. 15

Аналогично показывается, что A' лежит на внешней биссектрисе угла MNK. Применяя такие же рассуждения для точек B', C', D', получаем, что точки A', B', C', D' – пересечения внешних биссектрис соседних углов четырехугольника $KLMN$.

Из треугольника $A'KN$ находим

$$\angle B'A'D' = \angle KA'N = 180^\circ - \angle A'KN - \angle A'NK =$$
$$= (90^\circ - \angle A'KN) + (90^\circ - \angle A'NK) = \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle MNK).$$

Аналогично получаем, что

$$\angle B'C'D' = \frac{1}{2}(\angle KLM + \angle LMN).$$

Таким образом,

$$\angle B'A'D' + \angle B'C'D' =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle MNK + \angle KLM + \angle LMN) = 180^\circ,$$

откуда и следует, что четырехугольник $A'B'C'D'$ – вписанный.

5. Из условия следует, что число

$$(x + yz)(y + zx) = xy + (x^2 + y^2)z + xyz^2 = (xy + z) + xyz^2$$

рационально. Поскольку число $xy + z$ рационально по условию, то и число $xyz^2 = (x + yz)(y + zx) - (xy + z)$ также рационально.

7. $n = 100$.

Назовем многочлен, удовлетворяющий условию задачи, *красивым*. Многочлен

$$P(x) = 100(x^{200} + x^{198} + \ldots + x^2 + 1) + 101(x^{199} + x^{197} + \ldots + x)$$

красив и имеет корень –1. Значит, при $n = 100$ требуемое возможно.

Осталось показать, что при $n < 100$ у красивого многочлена $P(x)$ не может быть вещественных корней. Для этого достаточно проверить, что $P(x) > 0$ при всех x. Это неравенство, очевидно, выполнено при $x \geq 0$; для отрицательных же $x = -t$ оно является следствием неравенства

$$100(t^{2n} + t^{2n-2} + \ldots + t^2 + 1) > 101(t^{2n-1} + t^{2n-3} + \ldots + t). \quad (*)$$

Значит, достаточно доказать это неравенство при всех $t > 0$. Умножая (*) на $t + 1$, получаем равносильное неравенство

$$100(t^{2n+1} + t^{2n} + \ldots + 1) > 101(t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t),$$

или

$$100(t^{2n+1} + 1) > t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t. \quad (**)$$

Заметим, что при всех $k = 1, \ldots, n$ верно неравенство $(t^k - 1)(t^{2n+1-k} - 1) \geq 0$, поскольку обе скобки имеют одинаковые знаки при $t > 0$. Раскрывая скобки, получаем

$$t^{2n+1} + 1 \geq t^{2n+1-k} + t^k.$$

Складывая все такие неравенства и учитывая, что $n < 100$, получаем

$$t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t \leq n(t^{2n+1} + 1) < 100(t^{2n+1} + 1),$$

что и доказывает (**).

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ МАКСВЕЛЛА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $\tau = T\dfrac{k}{k-1} \approx 780$ суток.

2. $\rho = \rho_0\dfrac{h}{vt} \approx 1{,}736$ г/м^3 (заметим, что ответ не зависит от площади дна сосуда).

3. 1) $t_0 = 5$ мин (лодка удалялась от весла и приближалась к нему одно и то же время, так как весло относительно воды в реке неподвижно);

2) $v_{\text{р}} = \dfrac{600\text{ м}}{600\text{ с}} = 1$ м/с ;

3) $v_0 = v_{\text{вверх}} + v_{\text{р}} = \dfrac{1200\text{ м}}{300\text{ с}} + 1\text{ м/с} = 5\text{ м/с}$.

4. Пусть m – масса оболочки шарика, m_1 – масса гелия в первом случае и m_2 – во втором. Тогда

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m+m_2}{m+m_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{m+m/9}{m+m/4}\cdot 2 = \frac{16}{9} \approx 1{,}78 .$$

8 класс

2. Из условия равновесия легкого поршня

$$p_1 = p - \rho_0 gh$$

и условия равновесия поплавка

$$p_1 S + \rho V g = pS$$

находим

$$\rho = \frac{\rho_0}{4} = 200\text{ кг/м}^3 .$$

3. 1) Из условия равновесия рычага в первом случае находим

$$m_x = \frac{5}{4}m .$$

2) Сравнив условия равновесия рычага во втором случае и в первом, получаем

$$2\Delta m = \Delta m_x .$$

Поскольку изменение массы льдинки пропорционально подведенному количеству теплоты, мощность нагрева левой льдинки должна быть в 2 раза больше.

4. Запишем уравнения теплового баланса для первого и для второго случаев и получим

$$c_1 = c_0\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{1}{\dfrac{t_{\text{д}}-t_x}{t_x-t_0} - 2\dfrac{t_{\text{д}}-t_y}{t_y-t_0}} \approx 920\text{ Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)} .$$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Человек может выйти за край обрыва вправо не больше чем на 1,5 м или отойти от края обрыва влево не больше чем на 2,5 м.

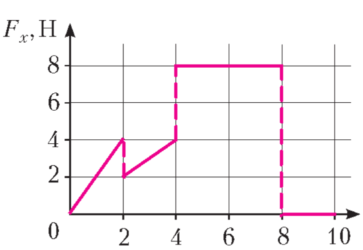


Рис. 16

2. На рисунках 16, 17, 18 изображены проекции силы, действующей на брусок со стороны нитей, ускорения и скорости бруска соответственно. Видно, что движение бруска начнется в момент времени $t_0 = 4$ с, брусок будет двигаться с постоянным ускорением, пока в момент времени $t_1 = 8$ с нити не перестанут действовать на брусок, затем брусок будет двигаться только под действием силы трения. Перемещение бруска найдем как площадь под графиком $v_x(t)$:

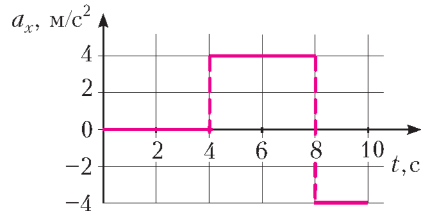


Рис. 17

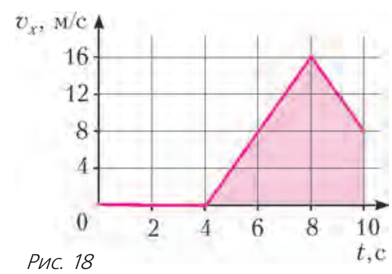


Рис. 18

$$\Delta x = 56\text{ м} .$$

4. Найдем напряжение U_{AB} на разъемах регулируемого источника в зависимости от силы тока I, текущего через нагрузку:

$$U_{AB} = U_0\frac{R}{R+r} - I\frac{Rr}{R+r} .$$

Для эквивалентной схемы

$$U_{AB} = U_1 - Ir_1 .$$

Чтобы при любом значении I эти два выражения совпадали, необходимы такие условия:

$$U_1 = U_0\frac{R}{R+r} \text{ и } r_1 = \frac{Rr}{R+r} .$$

Заметим, что с тем же успехом можно сравнивать не напряжение на разъемах, а силу тока через нагрузку.

5. Запишем уравнение движения малого элемента жидкости длиной Δr , находящегося в горизонтальной части трубки на расстоянии r от оси вращения:

$$\omega^2 r\rho S\Delta r = S\Delta p ,$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – угловая скорость вращения трубки, Δp – перепад давлений. При вычислении разности давлений на концах всего горизонтального участка трубки получим (рис.19)

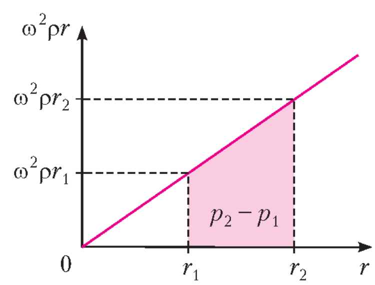


Рис. 19

$$p_2 - p_1 = \omega^2\rho\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} .$$

В нашем случае, когда половина горизонтальной части трубки заполнена водой, а половина ртутью,

$$p_2 - p_1 = \omega^2\rho_{\text{в}}\frac{(l/2)^2 - 0}{2} + \omega^2\rho_{\text{р}}\frac{l^2 - (l/2)^2}{2} = \left(3\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{в}}\right)\frac{\omega^2 l^2}{8} .$$

Этот перепад давлений и поддерживает разность давлений вертикальных столбов воды и ртути:

$$\left(3\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{в}}\right)\frac{\omega^2 l^2}{8} = \rho_{\text{р}} gh - \rho_{\text{в}} gh ,$$

откуда находим

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{2gh}}\sqrt{\frac{3\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}}}} \approx 1{,}0\text{ с} .$$

10 класс

1. Запишем уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось:

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T\sin\alpha ,\ m_2 a_2 = m_2 g - 2T .$$

Для нерастяжимой нити

$$2\Delta y_1 \sin\alpha + 2\Delta y_2 = 0 ,$$

откуда получаем

$$v_1 \sin\alpha + v_2 = 0\ ,$$

$$\Delta\left(v_1 \sin\alpha\right) + \Delta v_2 = \Delta v_1 \sin\alpha + v_1 \Delta\left(\sin\alpha\right) + \Delta v_2 = 0\ .$$

Поскольку в начальный момент скорости грузов равны нулю,

$$\Delta v_1 \sin\alpha + \Delta v_2 = 0\ ,\ \text{и}\quad a_1 \sin\alpha + a_2 = 0\ .$$

Окончательно находим

$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}\ ,\quad a_2 = -g\frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}\sin\alpha\ .$$

2. Проекция равнодействующей силы на ось x равна

$$F_x = mg\sin\varphi - \alpha x mg\cos\varphi\ .$$

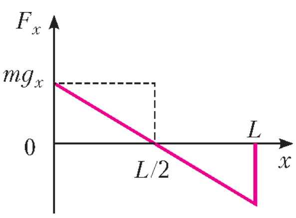


Рис. 20

Построим график этой зависимости (рис.20). Скорость тела будет максимальной, когда $F_x = 0$.

Работа равнодействующей силы равна нулю, так как кинетическая энергия в конце и в начале одна и та же и равна нулю. Значит, работа по разгону равна по модулю работе по торможению. Работа по разгону равна изменению кинетической энергии на величину $mv^2/2$, где v – искомая скорость. Площадь верхнего треугольника на рисунке 20 есть половина площади прямоугольника, равной работе силы тяжести при опускании груза на $H/2$, т.е. равной $mgH/2$. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mg\frac{H}{2}\ ,\ \text{откуда}\ \ v = \sqrt{\frac{gH}{2}}\ .$$

3. Тепло подводится на участке *1–2* и отводится на участке *3–1*. Тогда

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}}\ ,$$

причем $Q_{31} = A_{31}$. Из первого начала термодинамики,

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = p\Delta V_{12} + \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{5}{3}\Delta U_{12}\ .$$

Для адиабатического процесса

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{31} = \Delta U_{12}\ .$$

Отсюда получаем

$$A_{23} = \frac{3}{5}Q_{12} = \frac{3}{5(1-\eta)}A_{31}\ .$$

Поскольку $0 < \eta \le 0{,}4$, то

$$\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \le A_{31}\ .$$

4. Поскольку на ВАХ ЧЯ есть два излома, то два диода включены последовательно. Ток через ЧЯ начинает течь только при напряжении 0,5 В, значит, к одному из диодов параллельно не подключен резистор. Делаем вывод, что в цепи есть резистор, включенный параллельно диоду или диоду с последовательно соединенным с ним резистором. С учетом конкретных данных получаем, что схема ЧЯ имеет вид, изображенный на рисунке 21.

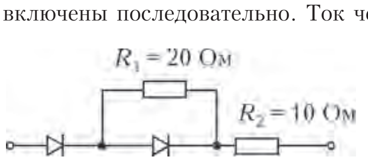


Рис. 21

5. Кинетическая энергия системы не изменилась. Потенциальная же энергия – связанная как с деформацией пружин, так и с взаимодействием груза с землей – изменилась. Вначале каждая пружина растянута на $\Delta x_1 = \frac{mg}{k}$ и их общая потенциальная энергия деформации равна

$$E_{д1} = 2\frac{k\Delta x_1^2}{2} = \frac{(mg)^2}{k}\ .$$

После перерезания нити пружины оказались соединенными параллельно и каждая из них растянута на вдвое меньшую длину: $\Delta x_2 = \frac{mg}{2k}$. Их общая энергия деформации равна

$$E_{д2} = 2\frac{k\Delta x_2^2}{2} = \frac{(mg)^2}{4k}\ .$$

Груз при этом поднимется на высоту $\Delta h = \Delta x_1 - \Delta x_2 = \frac{mg}{2k}$, и изменение потенциальной энергии тяготения будет равно

$$\Delta E_{т} = mg\Delta h = \frac{(mg)^2}{2k}\ .$$

В итоге потенциальная энергия изменится на

$$\Delta E = \Delta E_{д} + \Delta E_{т} = E_{д2} - E_{д1} + \Delta E_{т} = -\frac{(mg)^2}{4k}\ ,$$

т.е. она уменьшится.

11 класс

1. Поскольку высота имеет размерность длины, то все прочее размерности в выражении для H должны в итоге дать ноль. Отсюда получаем

$$\alpha + \gamma = 0\ ,\quad \alpha + \lambda = 0\ ,\quad \lambda - \alpha - 3\gamma + \beta = 1\ ,$$

или

$$\alpha = -\gamma = -\lambda\ \ \text{и}\ \ \alpha + \beta = 1\ .$$

Тогда можно записать

$$H = 1{,}25\left(\frac{E}{\rho g}\right)^{\alpha} R^{1-\alpha},\ \text{или}\ H = 1{,}25 r^{\alpha} R^{1-\alpha},\ \text{где}\ r = \frac{E}{\rho g} \approx 204\ \text{м}\ .$$

По расчетам Бага,

$$1\ \text{м} = 1{,}25\cdot(204\ \text{м})^{\alpha}\cdot(0{,}05\ \text{м})^{1-\alpha} = 1{,}25\cdot\left(\frac{204\ \text{м}}{0{,}05\ \text{м}}\right)^{\alpha}\cdot 0{,}05\ \text{м}\ .$$

Это выражение преобразуется к виду

$$16 = (4080)^{\alpha}\ ,\ \text{откуда находим}\ \ \alpha = \frac{\ln 16}{\ln 4080} = \frac{1}{3}.$$

Запишем теперь выражения для высоты колонны по расчета Бага и Глюка и найдем их отношение:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2}{3}}.\ \text{Отсюда получим}\ \ H_2 = H_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 2\ \text{м}\ .$$

2. Пронумеруем грузы слева направо и запишем для каждого второй закон Ньютона:

$$ma_1 = F\ ,\quad ma_2 = T - F\ ,\quad ma_3 = mg - T\ ,$$

где F – сила натяжения пружины, а T – сила натяжения нити. При этом $a_2 = a_3$, так как нить нерастяжима. Теперь найдем разность ускорений лежачих грузов:

$$a_2 - a_1 = \frac{g}{2} - \frac{3F}{2m}\ ,\ \text{или}\ \ x'' = \frac{g}{2} - \frac{3k}{2m}x\ ,$$

где x – удлинение пружины. Введем обозначения

$$\omega^2 = \frac{3k}{2m}\ ,\quad A_0 = \frac{mg}{3k}\ ,\quad y = x - A_0$$

и получим уравнение гармонических колебаний

$$y'' + \omega^2 y = 0\ ,$$

решение которого имеет вид

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t\ ,\ \text{или}\ \ x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + A_0\ .$$

С учетом начальных условий,

$$x = A_0\left(1 - \cos\omega t\right).$$

Максимальное удлинение $\Delta l = 2A_0 = \frac{2mg}{3k}$ достигается впервые через время

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} .$$

3. Производительность градирни q можно найти из уравнения теплового баланса

$$L\Delta m = cq\Delta t ,$$

где Δm – масса испарившейся воды в единицу времени, Δt – изменение температуры воды. В градирню ежесекундно поступает объем воздуха

$$V = Su = \frac{\pi D^2}{4}u ,$$

в котором содержится водяной пар массой

$$m_{\text{вх}} = \frac{pVM}{RT} = \frac{p\pi D^2 uM}{4RT} ,$$

где p – давление водяного пара на входе, M – молярная масса воды. Масса пара, выходящего из градирни за это же время, равна

$$m_{\text{вых}} = \frac{p_{\text{нас}}VM}{RT} = \frac{p_{\text{нас}}\pi D^2 uM}{4RT} .$$

Таким образом, из поступающей в градирню воды ежесекундно испаряется

$$\Delta m = \frac{p_{\text{нас}}\pi D^2 uM}{4RT}(1-\varphi) ,$$

где $\varphi = 0{,}4$. Тогда окончательно

$$q = \frac{L\Delta m}{c\Delta t} = \frac{Lp_{\text{нас}}\pi D^2 uM(1-\varphi)}{4RTc\Delta t} \approx 150 \text{ кг/с} = 540 \text{ т/ч} .$$

4. 1) $U_C = \frac{3}{4}\mathcal{E}$. 2) Запишем второй закон Кирхгофа для внутренних контуров цепи – левого (1) и правого (2) соответственно (рис.22):

$$\mathcal{E} = -I_1R + U_C + U_{3C} + I_3R , \quad 2\mathcal{E} = I_2 \cdot 2R + U_{3C} + I_3 \cdot 3R ,$$

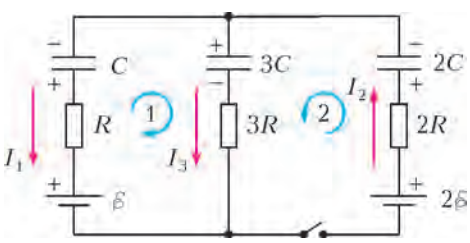


Рис. 22

причем

$$\mathcal{E} = U_C + U_{3C} , \quad I_2 = I_1 + I_3 .$$

Отсюда находим

$$I_3 = \frac{7\mathcal{E}}{44R} .$$

3) По окончании переходных процессов тока в цепи не будет. Для тех же самых контуров теперь можно записать

$$\mathcal{E} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{3C} , \quad 2\mathcal{E} = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_3}{3C} ,$$

причем

$$q_1 + q_2 = q_3 .$$

Окончательно получаем

$$U_C = \frac{1}{6}\mathcal{E} .$$

5. 1) Общая индуктивность тетраэдра порядка L. Время установления токов в цепи равно $L/R = 10^{-5}$ с. Поэтому через 1 минуту переходные процессы прекратятся, и

$$I_{60} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 46 \text{ мА} .$$

2) Для любой катушки индуктивности ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt} .$$

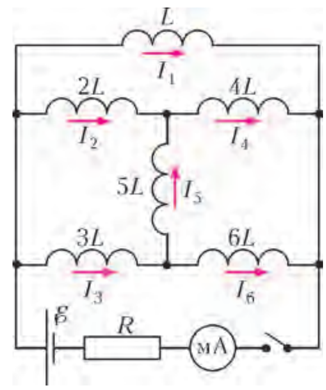


Рис. 23

Рассмотрим контуры, не содержащие батарейку, и запишем для них второй закон Кирхгофа. Например, для контура из катушек индуктивностями $2L$, $5L$ и $3L$ (рис.23):

$$-2L\frac{dI_2}{dt} + 5L\frac{dI_5}{dt} + 3L\frac{dI_3}{dt} = 0 ,$$

или

$$-2L\Delta I_2 + 5L\Delta I_5 + 3L\Delta I_3 = 0 .$$

Учитывая, что вначале все токи равны нулю, получаем

$$-2I_2 + 5I_5 + 3I_3 = 0 .$$

Аналогичные равенства запишем для других контуров:

$$-I_1 + 4I_4 + 2I_2 = 0 , \quad -4I_4 - 5I_5 + 6I_6 = 0 .$$

Поскольку, в соответствии с первым законом Кирхгофа,

$$I_2 + I_5 = I_4 , \quad I_3 = I_5 + I_6 ,$$

а также

$$I_A = I_1 + I_2 + I_3 ,$$

окончательно находим

$$I_1 = 18 \text{ мА} , \quad I_2 = I_4 = 3 \text{ мА} , \quad I_3 = I_6 = 2 \text{ мА} , \quad I_5 = 0 .$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, Е.А.Силина, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь

www.Pareto-print.ru

Виши Ананд – победитель турнира претендентов

В марте в Ханты-Мансийске состоялся очередной турнир претендентов на мировое первенство. Победителем его стал Виши Ананд, который снова сразится с Магнусом Карлсеном, правда на сей раз уже не как чемпион мира, а как претендент на корону.

Вот восемь участников, собравшихся в Югре, они расположены в порядке убывания рейтинга перед стартом турнира: Левон Аронян (Армения) – 2830, Владимир Крамник (Россия) – 2787, Веселин Топалов (Болгария) – 2785, Виши Ананд (Индия) – 2770, Сергей Карякин (Россия) – 2766, Петр Свидлер (Россия) – 2758, Шахрияр Мамедьяров (Азербайджан) – 2757, Дмитрий Андрейкин (Россия) – 2709.

Как был определен состав турнира? Ананд вошел в него как предыдущий чемпион мира, Крамник и Андрейкин как финалисты Кубка мира, Топалов и Мамедьяров как победители Гран-при ФИДЕ, Аронян и Карякин как обладатели самого высокого рейтинга, наконец, Свидлер занял место, предоставленное ФИДЕ стране-организатору.

Большинство специалистов полагали, что победителем станет либо Аронян, либо Крамник, другие делали ставку на Карякина. В Ананда мало кто верил, он и сам колебался, играть или не играть, и дал согласие в самый последний момент. Это и понятно: многие опасались, что Виши еще не успел залечить раны после фиаско с Карлсеном. Однако прогнозы не подтвердились. В Ханты-Мансийске он выглядел как в свои лучшие годы и доказал, что по-прежнему очень силен.

Приведем все три победы победителя турнира. В первом же туре единственная результативная партия Ананд – Аронян принесла сенсацию. Армянский гроссмейстер, считавшийся фаворитом, в испанской партии готов был применить свою любимую атаку Маршалла с жертвой пешки, но Ананд отклонился от классики, избрал, как говорят, анти-Маршалл. Левон все равно отдал пешку, но Ананд быстро вернул ее, получив заметный позиционный перевес и преимущество двух слонов. Дело кончилось тем, что конь Ароняна заблудился.

В.Ананд–Л.Аронян

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♘f6 5. 0–0 ♗e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 0–0 8. h3. Один из способов отклониться от изученной вдоль и поперек атаки Маршалла – 8. c3 d5.

8... ♗b7 9. d3 d5. Все-таки. **10. ed ♘:d5 11. ♘bd2 ♕d7?** Не очень удачная новинка, надежнее 11...f6.

12. ♘:e5 ♘:e5 13. ♖:e5 ♘f6 14. ♖e1 ♖ae8 15. ♘f3 ♗d6 16. ♗e3 ♖e7 17. d4! ♖fe8 18. c3 h6.

19. ♘e5! Ананд расстается с пешкой, но переходит в окончание с двумя слонами и шансами открыть счет. **19... ♗:e5 20. de ♖:e5 21. ♕:d7 ♘:d7 22. ♖ed1 ♘f6?** Лучше 22...♘c5.

23. c4! Препятствуя размену слона 23...♘d5 и ослабляя неприятельские пешки ферзевого фланга. **23...c6 24. ♖ac1 ♖5e7 25. a4bc 26. ♗:c4 ♘d5 27. ♗c5 ♖e4 28. f3 ♖4e5 29. ♔f2 ♗c8 30. ♗f1 ♖5e6 31. ♖d3 ♘f4 32. ♖b3 ♖d8 33. ♗e3 ♘d5 34. ♗d2 ♘f6 35. ♗a5 ♖de8 36. ♖b6 ♖e5 37. ♗c3 ♘d5 38. ♗:e5 ♘:b6 39. ♗d4! ♘:a4 40. ♖:c6.** Конь черных в капкане, и вскоре они сдались. После матча Ананд –Карлсен новый чемпион пошутил «Теперь очередь Ананда поучиться у меня!» Тонкая победа индийского гроссмейстера в эндшпиле показала, что он уже кое-чему научился...

А в 3-м туре Ананд начисто переиграл Мамедьярова.

Ш.Мамедьяров–В.Ананд

Славянская защита

1. d4d5 2. c4c6 3. ♘f3 ♘f6 4. ♕c2dc 5. ♕:c4 ♗g4 6. ♘bd2 ♘bd7 7. g3 e6 8. ♗g2 ♗e7 9. ♘e5 ♗h5 10. ♘:d7 ♘:d7 11. 0–0 0–0 12. ♘b3 a5 13. a4 ♗b4 14. e4e5! 15. ♗e3 ed 16. ♗:d4 ♔h8 17. e5?! ♖e8! Черные благополучно миновали дебютные рифы, и тут противник проявляет неуместную активность. **18. f4f6 19. ef ♘:f6 20. ♗f3 ♗:f3 21. ♖:f3.** Крепость белого короля ослаблена, и это быстро дает о себе знать. **21... ♖e4 22. ♖e3? ♖:e3 23. ♗:e3 ♕e8!** Ферзь перемещается на h5, и белому королю несдобровать.

24. ♗b6 ♕h5 25. ♗d4 ♖e8 26. ♖f1 ♘g4 27. ♕c2c5! 28. ♘:c5 ♖c8 29. ♖d1 ♗:c5 30. ♗:c5h6 31. ♔h1. Белые сдались, не дожидаясь шаха конем с f2.

Третью победу Ананд одержал во втором круге, в 9-м туре, встречаясь с Топаловым.

В.Ананд–В.Топалов

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. h3 e6 7. g4 ♘fd7 8. ♗g2 ♗e7 9. ♗e3 ♘c6 10. h4 ♘de5 11. g5 ♗d7 12. ♘:c6 ♗:c6 13. b3 f5. Заманчивый подрыв, однако Виши находит интересный план стабилизации в центре, который явно недооценил соперник. **14. f4! ♘g4 15. ♕e2 ♘:e3 16. ♕:e3 fe 17. 0–0–0! d5 18. ♘:e4 Ca3+ 19. ♔b1 ♕e7 20. ♘f2!** Конь с d3 собирается прикрыть важные поля b4 и f4, и болгарский гроссмейстер идет на размен, после чего черные остаются с плохим белопольным слоном. **20... ♗c5 21. ♕g3 ♗:f2 22. ♕:f2 0–0 23. ♕d4 ♖f5 24. ♖de1 ♖af8 25. ♖hf1 ♕d6 26. ♖e5 ♖:e5 27. fe ♖:f1+ 28. ♗:f1 ♕e7 29. a4.** Еще сильнее 29. ♗h3 ♗e8 30. ♕g4!, не выпуская слона на g6.

29... ♗e8 30. ♔b2 ♗g6 31. ♗h3 h6? Как ни странно, эта неточность оказывается решающей ошибкой. Теперь у черных появляется еще одна слабость. **32. gh gh 33. ♕g4 ♔f7 34. h5 ♗e4 35. a5! ♗h7 36. c3 ♗e4 37. c4!** У Топалова нет полезных ходов – 37... ♗h7 38. cd ed 39. ♕f3+ проигрывает пешку «d»; 37...♕e8 38. ♕f4 ♔e7 39. ♕f6 ♔d7 40. ♕h6 – пешку «h».

37... ♗f5 38. ♕f4 dc 39. ♗:f5 ef 40. ♕:f5+ ♔e8 41. ♕c8+ ♔f7 42. ♕:c4+. Ферзевый эндшпиль безнадежен для черных, и они сдались через пятнадцать ходов.

Итак, в претендентской гонке досрочно победил экс-чемпион мира Виши Ананд. Он опроверг все пессимистические прогнозы на свой счет. Играл легко, без напряжения, ни разу не остановил часы, лидировал с первого до последнего тура – все на отлично!

Итоги претендентской битвы: 1. Ананд – 8,5 очков из 14; 2. Карякин – 7,5; 3–5. Андрейкин, Крамник, Мамедьяров – 7; 6–7. Аронян, Свидлер – 6,5; 8. Топалов – 6.

Е.Гик

Индекс 90964

Двухчастотный маятник

Здесь изображен маятник с Y-образным подвесом, «выписывающий» на листе бумаги фигуру Лиссажу. Оцените правдоподобность полученной картинки.

(Продолжение – на с. 36 внутри журнала)